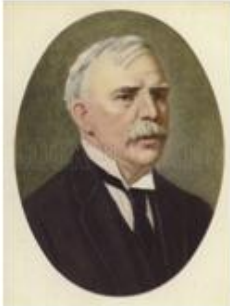
«Все науки делятся на физику
и коллекционирование марок»

- Эрнест РЕЗЕРФОРД
(Нобелевскийлауреат).



Благосостояние народов зависит
от прогресса математики

НАПОЛЕОН Бонапарт
(император французов)

Экелекян Варужан Левонович
канд. физ.-мат. наук, доцент физ.-фака МГУ им. М.В.Ломоносова,
преподаватель математики, физики, астрономии и информатики
ГБОУ города Москвы «Лицей № 1561», эл. адрес: hekevar@gmail.com

Выдержки из доклада на семинаре кафедры математики физического факультета МГУ им. М.В.Ломоносова

Дополнительные вопросы подготовки учеников 7 – 11 классов к
- проектным,
- исследовательским

работам, а также к участию на олимпиадах по предметам физика, математика и информатика.

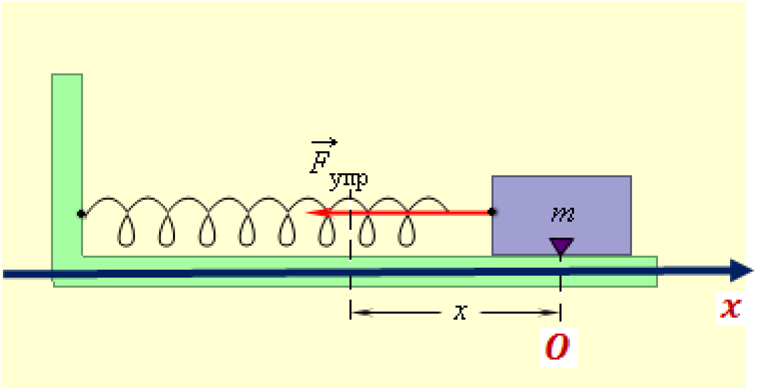
Предлагается цикл шести практических лекций.

Первая часть первой лекции посвящена важному для физических задач вопросу применения начальных условий и граничных условий.

Известно, что дифференциальные уравнения имеют бесчисленное множество решений. Чтобы из этого множества выбрать то единственное решение, которое соответствует реальному физическому процессу надо задать некоторые дополнительные условия.

В школьной программе математики и физики 10 – 11 классов встречается тема «Гармонические колебания». Это одномерное движение материальной точки с массой **m** под воздействием только упругой силы

$$\mathbf{F_x = -kx}. \qquad (1)$$



Здесь **k** - коэффициент упругости, а **x** проекция перемещения на ось **x** (мера деформации).

Движение подчиняется второму закону Ньютона, который запишем в виде

$$\mathbf{m \cdot a_x = -k \cdot x}, \qquad (2)$$

где a_x проекция ускорения на ось **x**.

Так как ускорение тела эта вторая производная перемещения по времени

$$a_x = \ddot{x},$$

уравнение (2) можно переписать в виде:

$$\ddot{x} + \omega^2 \cdot x = 0. \qquad (3)$$

Здесь мы левую и правую части уравнения (2) разделили на массу **m**, перенесли в левую сторону и ввели положительный параметр ,

$$\omega^2 = \frac{k}{m} \qquad (4)$$

Уравнение (3), пожалуй, единственное дифференциальное уравнение второго порядка, с которым ученики общаются в школе. Системное решение этого уравнения в школе естественно не рассматривается, а вот проверить некое априори предложенное решение рекомендуется. Итак, предложим решение

$$x = x(t)$$

в виде

$$x = A \cdot \sin(\omega t + \varphi_0), \qquad (5)$$

где $\mathbf{t}$ - время, параметр $\boldsymbol{\omega}$ – определен из соотношения в (4) , а постоянные величины $\mathbf{A}$ и $\boldsymbol{\varphi_0}$ подлежат определению из начальных условий.

Вычислим первую и вторую производные функции (5) по времени:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{cos}(\boldsymbol{\omega}\mathbf{t} + \boldsymbol{\varphi_0}), \qquad (6)$$

$$\ddot{\mathbf{x}} = -\mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\omega}^2 \cdot \mathbf{sin}(\boldsymbol{\omega}\mathbf{t} + \boldsymbol{\varphi_0}). \qquad (7)$$

Сравнивая выражения (7) и (5) легко убедится, что функция (5) является решением уравнения (3). В школе учат, что движение (5) имеющее место по закону синуса или косинуса от времени и называется гармоническим. Величины и параметры, входящие в уравнение (5) гармонических колебаний имеют автономный физический смысл:

$\boldsymbol{x}$ – перемещение материальной точки от некоторого положения, которое называется положением равновесия (в этой точке упругая сила $\mathbf{F_x}$ равна нулю),

$\mathbf{t}$ – время (считается, что хронометр включают после наступления начального времени $\boldsymbol{t_0}$);

$\mathbf{A}$ – амплитуда, максимальное положительное смещение тела от положения равновесия;

$\boldsymbol{\omega}^2$– квадрат циклической частоты (см. (4));

$(\boldsymbol{\omega t} + \boldsymbol{\varphi_0})$ – фаза колебаний (безразмерная величина);

$\boldsymbol{\varphi_0}$ – начальная фаза.

Настало время осмыслить понятия амплитуды и начальной фазы исходя из начальных условий.

Пусть в начальный момент $\boldsymbol{t_0}$ смещение материальной точки от положения равновесия составляет

$$\boldsymbol{x_0} \qquad (\boldsymbol{x_0} = \mathbf{x}(\mathbf{t_0})),$$

а начальная скорость равна

$$\dot{\mathbf{x}}_0 \qquad (\dot{\mathbf{x}}_0 = \dot{\mathbf{x}}(\mathbf{t_0}))$$

С помощью (5) и (6) получим:

$$\boldsymbol{x_0} = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{sin}(\boldsymbol{\omega t_0} + \boldsymbol{\varphi_0}), \qquad (8)$$

$$\dot{\mathbf{x}}_0 = \mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{cos}(\boldsymbol{\omega t_0} + \boldsymbol{\varphi_0}). \qquad (9)$$

При делении уравнения (8) на (9) (это процедура физике и в математике называется избавление от амплитуды) получим выражение для начальной фазы:

$$\varphi_0 = -\omega t_0 + arctg\frac{\omega \cdot x_0}{\dot{x}_0}. \qquad (10)$$

Если же выражения (8) и (9) разрешить по отношению синуса и косинуса , далее возвести в квадрат и суммировать (это процедура физике и в математике называется избавление от времени), то получим выражение для амплитуды:

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{\dot{x}_0^2}{\omega^2}} \quad . \qquad (11)$$

Итак, первая поставленная задача решена –

амплитуда и начальная фаза гармонических колебаний выразили через начальные данные одномерного движения (см. (10) и (11)). Возможно также выражение через начальную энергию и импульса.

Вторая часть первой лекции посвящена теоретическому расчету и практическому конструированию тел вращения в работе гидротермальных электростанций. Здесь также применение начальных условий и граничных условий позволяет выбирать нужное физическое решение.

Известно, что большинство вулканов и кратеров на Земле имеют форму тел вращения. Эти естественные географические месторождения, находясь под открытым небом, часто заполнены водой, которая оказывает давление на стены. С другой стороны существует отрасль народного хозяйства – **геотермальная энергетика:** направ-ление энергетики, основано на производстве электрической энергии за счёт энергии, содержащейся в недрах земли, на **геотермальных станциях**.

В вулканических районах циркулирующая вода перегревается выше температуры кипения на относительно небольших глубинах и по трещинам поднимается к поверхности, иногда проявляя себя в виде гейзеров. Хозяйственное применение геотермальных источников распространено в Исландии и Новой Зеландии, Италии и Франции, Китае, Японии.

В Российской Федерации основные геотермальные источники концентрированы на Камчатке (Мутновское месторождение, 40 % потребляемой энергии вырабатывается на геотермальных источниках). По данным института вулканологии Дальневосточного Отделения РАН, геотермальные ресурсы Камчатки оцениваются в 5000 МВт.[1]

Ниже приведенная таблица (см. [2]) наглядно свидетельствует, что для Российской Федерации существует проблема дальнейшей дополнительной

Установленная мощность по странам

Страна	**Мощность, МВт 2007**	**Мощность, МВт 2010**	**Доля от общей выработки электроэнергии, 2010**
США	2687	3086	0,3 %
Россия	79	82	0,05 %

разработки теоретических и практических аспектов **геотермальной энерге-тики** в общем и **построения геотермических электростанции**, в частности. В свою очередь, в этом вопросе важное значение имеет **вовлечение молодых специалистов** уже на школьном уровне, благо во многих школах страны организованы группы (кружки), где ведутся серьезные учебные исследования и проектные работы по физике, по программам **«Инженерные классы»**.

Данная работа собой представляет некую первую вводную попытку теоретически и практически решать следующую проблему:

вода в виде струи заполняет объем трех тел вращения с постоянной скоростью v $\frac{мл}{c}$ $(v = const)$. Ставятся следующие теоретические задачи:

- как зависит высота подъема уровня воды $y = y(t)$ от времени, (I)
- с какой скоростью происходит эта заполнение $w = y'$. (II)

В качестве тел вращения рассматриваются:

1. полукруг (полусфера), которая получается в результате вращения дуги окружности $x^2 + (y - R)^2 = R^2$ вокруг оси y в декартовой системе координат, радиус окружности R;
2. параболоид вращения, это поверхность, которая получается в результате вращения дуги параболы $y = x^2/R$ вокруг оси y ($y(R) = R$);
3. конус, это поверхность, которая получается в результате вращения линии (отрезка) $y = x$ вокруг оси y ($y(R) = R$).

Ученик должен знать, что объем тела, образованного вращением вок-руг оси $0y$ фигуры, ограниченной кривой $x = g(y)$, отрезком оси ординат $c \le y \le d$ и прямыми $y = c$, $y = d$ вычисляется по формуле [3] (стр. 194):

---

[1] Геотермальная энергетика. журнал «Энергосвет». ноябрь 2012.

[2] *Bertani, Ruggero (September 2007), "World Geothermal Generation in 2007", Geo-Heat Centre Quarterly Bulletin (Klamath Falls, Oregon: Oregon Institute of Technology) . — Т. 28 (3): 8–19, ISSN 0276-1084.*

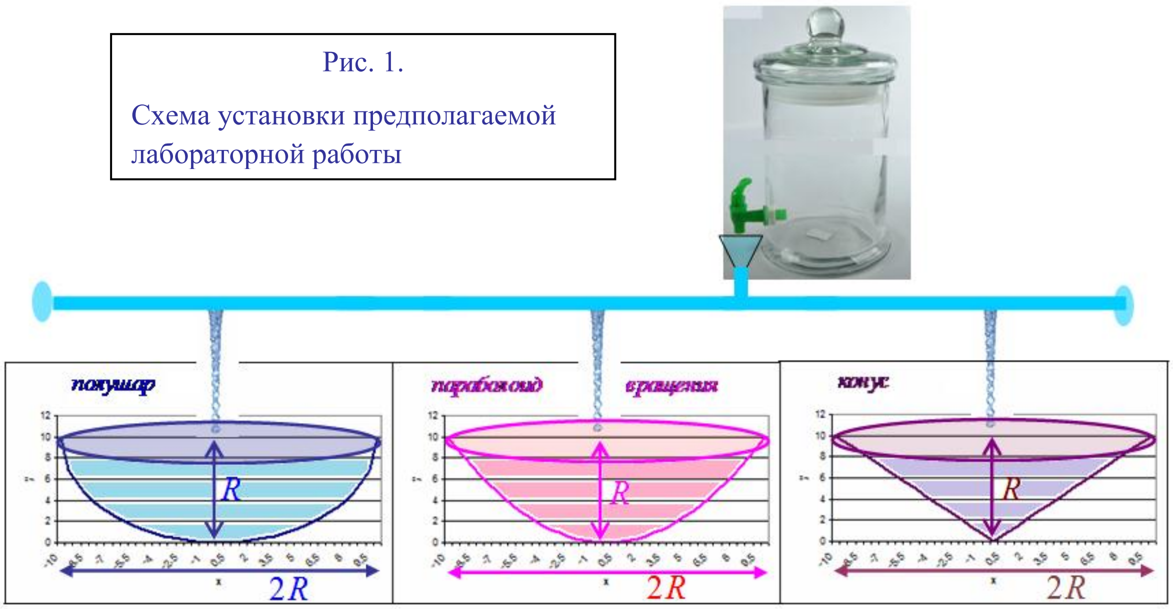
[3] Алгебра и начала анализа, 10-11 класс, Колмогоров А.Н., Абрамов А.М., Дудницын Ю.П. **:** М.: Просвещение, 2010

$$V_y = \pi \int_c^d \left(g(y)\right)^2 dy \quad (1)$$

Эта формула позволяет вычислить зависимость объема тела вращения от высоты y:

Рис. 1.

Схема установки предполагаемой лабораторной работы



Эта формула позволяет вычислить зависимость объема тела вращения от высоты y:

Таблица 1.

		полусфера	параболоид вращения	конус
1.	$V_y = V(y)$	$\pi\left(Ry^2 - \frac{y^3}{3}\right)$	$\frac{\pi R}{2} y^2$	$\frac{\pi}{3} y^3$
2.	$V_{пол}$	$2\pi R^3/3$	$\pi R^3/2$	$\pi R^3/3$
3.	$T_{пол}$	$\frac{2\pi R^3}{3v}$	$\frac{\pi R^3}{2v}$	$\frac{\pi R^3}{2v}$

Вторая и третья строки таблицы указывают на полный объем V заполнения тела и сколько всего времени T на это уходит.

Поставленная в настоящей работе теоретическая задача (I) – это математическое решение уравнения:

Таблица 1.

		полусфера	параболоид вращения	конус
1.	$V_y = V(y)$	$\pi\left(Ry^2 - \frac{y^3}{3}\right)$	$\frac{\pi R}{2} y^2$	$\frac{\pi}{3} y^3$
2.	$V_{пол}$	$2\pi R^3/3$	$\pi R^3/2$	$\pi R^3/3$

3.	$T_{пол}$	$\frac{2\pi R^3}{3v}$	$\frac{\pi R^3}{2v}$	$\frac{\pi R^3}{2v}$

Вторая и третья строки таблицы указывают на полный объем V заполнения тела и сколько всего времени T на это уходит.

Поставленная в настоящей работе теоретическая задача (I) – это математическое решение уравнения:

$$V_y = V(y) = vt, \qquad (2)$$

которое удовлетворяло бы граничным условиям:

$$y(\theta = 0) = 0, \qquad y(\theta = 1) = R. \qquad (3)$$

Здесь $\theta = t/T$ - безразмерное время.

Уравнение (2) в случае полусферы и конуса является кубическим алгебраическим [4], тогда как для параболоида вращения оно есть квадратное уравнение. Техника решения этих уравнений изложена в моей работе [5]. Здесь же приведем результаты:

Таблица 2.

	полусфера	параболоид вращения	конус
$\bar{y} = y/R = \vartheta(\theta)$	$1 + 2\cos\left(\frac{\arccos(1-\theta)}{3} + \frac{4\pi}{3}\right)$	$\sqrt{\theta}$	$\sqrt[3]{\theta}$
$w = \frac{dy}{dt} = \frac{v}{\pi R^2} \cdot f(\theta)$	$-\frac{1}{\sqrt{2\theta - \theta^2}} \cdot \sin\left(\frac{\arccos(1-\theta)}{3} + \frac{4\pi}{3}\right)$	$\frac{1}{\sqrt{\theta}}$	$\frac{1}{\sqrt[3]{\theta^2}}$

Решение задачи (II) представляет собой просто дифференцирование, результат которого приведен на второй строке таблицы.

Ниже приводятся два графика - первый график изображает зависимость высоты заполнения тел вращения от времени $y = y(t)$, тогда как второй график указывает на зависимость $w = y'(t)$ скорости увеличения уровни воды в трех сосудах, от безразмерного времени.

Очевидно, что в начале и в конце процесса заливания эта высота одинаковая, тогда как в промежутке уровень воды в конусе увеличивается

---

[4] Математика. Алгебра и начала математического анализа, геометрия. Углубленный уровень ФГОС. 11кл. Виленкин Н. Я., МНЕМОЗИНА, М.: 2015

[5] Об одной задаче заполнения пространства тел вращения жидкостью. Экелекян В. Л.

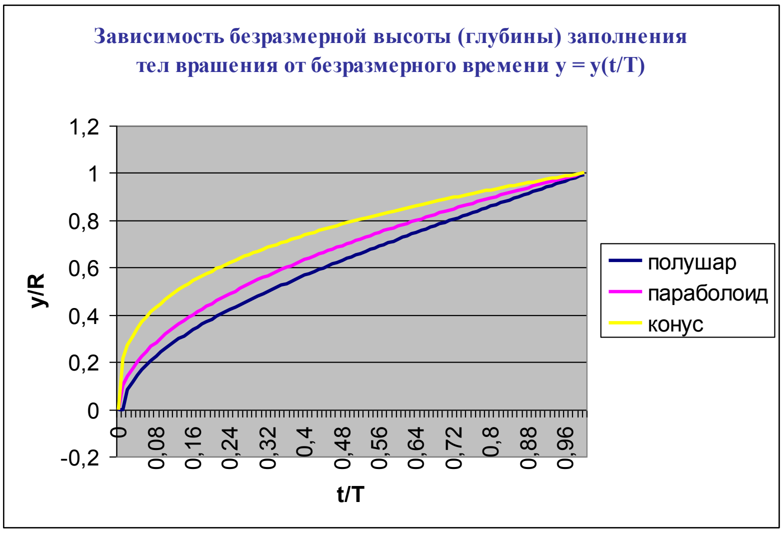


График 1.

быстрее, чем у полусферы. Максимум разности равен 0,208 и он наступает при значении безразмерного времени, равном 0,14.

График 2.

Из Графика 2. видно, что в конце процесса заливания разных тел вращения эти скорости почти равны между собой и равны - $w = \dfrac{v}{\pi R^2}$. До значения безразмерного времени 0,22 самая большая скорость заливания у конуса (конус в низу узкий) и самая медленная - у полусферы (полушар в низу объемный).

Данные второй строки Таблицы 1. позволяют получить отношения полного времени заполнения тел вращения:

$$T_{псф} : T_{пар-д} : T_{кон} = \frac{2}{3} : \frac{1}{2} : \frac{1}{3}, \qquad (4)$$

Этот результат является следствием отношений соответствующих объемов (см. строку 3 Таблицы 1.) и постоянства скорости v струи для трех тел вращения – так называемый учет интегральных характеристик задачи:

$$V_{псф} : V_{пар-д} : V_{кон} = \frac{2}{3} : \frac{1}{2} : \frac{1}{3}.$$

Отношение (4) хорошо откликается с теоремой Архимеда:

в свое время Архимед сумел установить, что сфера и конусы с общей вершиной, вписанные в цилиндр, соотносятся следующим образом [6]:

два конуса : сфера : цилиндр как 1 : 2 : 3.

Итак, основное отличие заливания для трех тел вращения проявляется в промежутке $0{,}01 < \theta < 0{,}5$.

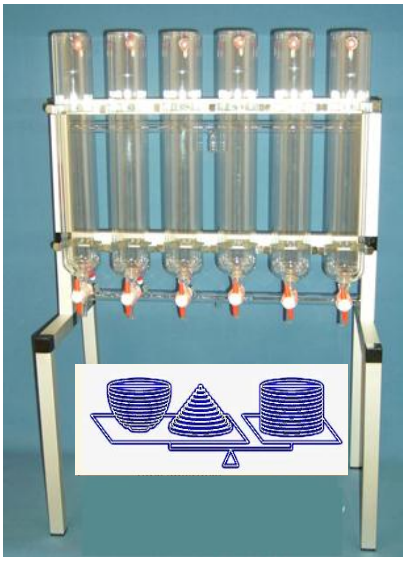
Изложенная теоретическая задача лежит в основе специальной лабораторной работы:

Цель работы: экспериментальная проверка результатов Таблицы 2. и соотношения (4);
Приборы и материалы: стеклянные или пластмассовые тела вращения одинаковой высоты и одинакового радиуса. Система поддержки оборудования. Система одинаковой подачи воды в тела вращения. Хронометр.
Ход работы: Собрать установку согласно схеме, приведенной на Рис. 1. или Рис. 2. Произвести измерения по высоте и по времени (использовать фотографирование). Результаты анализировать с помощью программы Microsoft Excel.

Эта лабораторная работа апробируется на занятиях:

Экспериментальная физика вместе с прикладной математикой
Разноуровневый школьный кружок *для учеников 5 – 11 классов*
(бесплатные курсы для групп дополнительного образования),

Рис. 2.



которые уже четыре года удачно ведутся в ГБОУ города Москвы «Лицей № 1561».

Результаты настоящей работы легко позволяют вычислить силу давления на стенки тел вращения в зависимости от высоты заполнения этих объемов водой (или другой массой). Эта задача также решена и опубликована и что важно – физико-математическое решение ограничивается знанием школьного курса.

Тематика **геотермальная энергетика и геотермальные электростанции** предполагает решение многих задач, имеющих отношение к термодинамике, электродинамике. Это и есть перспектива в серьезных учебных исследованиях и проектных работах по физике, математике и информатике по **программам «Инженерные классы»**.

[6] **АРХИМЕД, сын ФИДИЯ,** Энциклопедия человеческой цивилизации, http://interlibrary.narod.ru/encyclopedia/10000200/10000260/100002601.htm