



МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. М.В. ЛОМОНОСОВА

Физический факультет

Н.Е. Шапкина, И.Е. Могилевский

**Пособие по математике для
10-11 классов
подготовительных курсов**

**Стереометрия
Часть 2**

Москва 2026

Шапкина Н. Е., Могилевский И. Е.
**Пособие по математике для 10-11 классов подготови-
тельных курсов. Стереометрия**

Данное пособие предназначено для подготовки к вступительным экзаменам в вузы и сдачи ЕГЭ по математике. Оно написано на основе материалов занятий по математике для 10-11 классов на подготовительных курсах физического факультета МГУ (в том числе выездных). Предполагается, что учащиеся знают школьный курс в объеме 9 классов. Однако программа в разных школах может отличаться, поэтому в пособии кратко приводятся теоретические сведения, необходимые для занятий. Для лучшего усвоения все разобранные примеры сопровождаются задачами. Как правило, аналогичная задача включена в обязательную часть домашнего задания. Дополнительные задачи в домашнем задании более сложные, но их тоже можно решить на основе разобранного материала. В текст также включены задачи повышенной сложности. После номера задачи в квадратных скобках приведена ссылка на тот источник в списке литературы, из которого взята задача.

ОГЛАВЛЕНИЕ

§ 1. Основные понятия и утверждения	5
1.1. Параллельность прямых и плоскостей (5). 1.2. Скрещивающиеся прямые (5). 1.3. Перпендикулярность прямых в пространстве, прямой и плоскости (6). 1.4. Углы между прямыми и плоскостями (6). 1.5. Перпендикулярность плоскостей (9). 1.6. Трехгранный угол (9).	
§ 2. Куб	10
2.1. Основные определения и утверждения (10). 2.2. Построение сечений. Площадь сечения (10). 2.3. Угол между плоскостями (19). 2.4. Угол между прямой и плоскостью (22). 2.5. Угол между прямыми в пространстве (22). 2.6. Расстояние от точки до плоскости (23). 2.7. Расстояние от точки до прямой (26). 2.8. Расстояние между прямыми (28). 2.9. Смешанные задачи (31). 2.10. Задачи повышенной сложности (33). 2.11. Задачи для самостоятельного решения (33). 2.12. Ответы к задачам на построение сечений (36).	
§ 3. Параллелепипед	37
3.1. Основные определения и утверждения (37). 3.2. Построение сечений. Площадь сечения (37). 3.3. Угол между плоскостями (46). 3.4. Угол между прямой и плоскостью (51). 3.5. Расстояние от точки до плоскости (52). 3.6. Расстояние от точки до прямой в пространстве (59). 3.7. Угол между прямыми в пространстве (61). 3.8. Объем параллелепипеда (64). 3.9. Наклонный параллелепипед (67). 3.10. Задачи повышенной сложности (68). 3.11. Ответы к задачам на построение сечений (69). 3.12. Задачи для самостоятельного решения (69).	
§ 4. Призмы	73
4.1. Основные определения и утверждения (73). 4.2. Построение сечений. Площадь сечения (74). 4.3. Задачи на отношения (76). 4.4. Угол между плоскостями (78). 4.5. Угол между прямой и плоскостью (81). 4.6. Расстояние от точки	

до плоскости (83). 4.7. Расстояние от точки до прямой (85).	
4.8. Углы и расстояния между прямыми в пространстве (88).	
4.9. Объем и площадь поверхности (96). 4.10. Наклонные	
призмы (98). 4.11. Ответы к задачам на построение се-	
чений (100). 4.12. Задачи повышенной сложности (100).	
4.13. Задачи для самостоятельного решения (100).	
Список литературы	105

§ 1. Основные понятия и утверждения

1.1. Параллельность прямых и плоскостей.

1. **Две прямые в пространстве называются параллельными**, если они лежат в одной плоскости и не пересекаются.
2. Если две прямые параллельны третьей прямой, то они параллельны.
3. **Прямая и плоскость называются параллельными**, если они не имеют общих точек.
4. Если прямая, не лежащая в данной плоскости, параллельна какой-нибудь прямой, лежащей в этой плоскости, то она параллельна данной плоскости.
5. Если плоскость проходит через прямую, параллельную другой плоскости, и пересекает эту плоскость, то линия пересечения плоскостей параллельна данной прямой.
6. **Две плоскости называются параллельными**, если они не пересекаются.
7. Если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум пересекающимся прямым другой плоскости, то эти плоскости параллельны.
8. Если две параллельные плоскости пересечены третьей, то линии их пересечения параллельны.

1.2. Скрещивающиеся прямые.

1. Два луча OA и O_1A_1 , не лежащие на одной прямой, называют сонаправленными, если они параллельны и лежат в одной полуплоскости, граница которой OO_1 [91]. Лучи OA и O_1A_1 , лежащие на одной прямой, называют сонаправленными, если они совпадают или один из них содержит другой. На рисунке 1 лучи OA и O_1A_1 , а также лучи O_2B_2 и A_2B_2 сонаправлены, а лучи OA и O_2A_2 , O_2A_2 и O_2B_2 не являются сонаправленными.

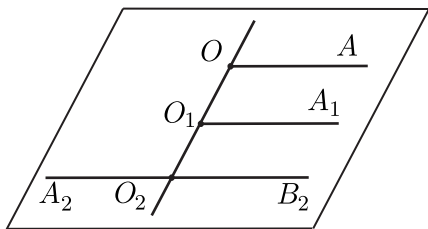


Рис. 1. Сонаправленные лучи

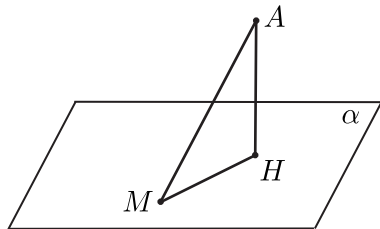


Рис. 2. Перпендикуляр и наклонная

2. Если стороны двух углов соответственно сонаправлены, то такие углы равны.
3. **Две прямые называются скрещивающимися**, если они не лежат в одной плоскости.
4. **Углом между скрещивающимися прямыми a и b** называется острый угол между пересекающимися прямыми a' и b' параллельными прямым a и b соответственно.

1.3. Перпендикулярность прямых в пространстве, прямой и плоскости.

1. **Две прямые в пространстве называются перпендикулярными**, если угол между ними равен 90° .
2. **Прямая называется перпендикулярной к плоскости**, если она перпендикулярна любой прямой, лежащей в этой плоскости.
3. Если одна из двух параллельных прямых перпендикулярна к плоскости, то и другая прямая перпендикулярна к этой плоскости.
4. Если две прямые перпендикулярны одной и той же плоскости, то они параллельны.
5. Если прямая перпендикулярна двум пересекающимся прямым, лежащим в плоскости, то она перпендикулярна к этой плоскости.
6. Если две плоскости перпендикулярны к некоторой прямой, то они параллельны.

1.4. Углы между прямыми и плоскостями.

1. Рассмотрим плоскость α и точку A , не лежащую в этой плоскости [91]. Проведем через точку A прямую, перпендикулярную к плоскости α , и обозначим буквой H точку пересечения этой прямой с плоскостью α (рис. 2). Отрезок AH называется **перпендикуляром, проведенным из точки A к плоскости α** , а точка H — основанием перпендикуляра. Отметим в плоскости α какую-нибудь точку M , отличную от H , и проведем отрезок AM . Он называется **наклонной, проведенной из точки A к плоскости α** , а точка M — основанием наклонной. Отрезок HM называется **проекцией наклонной на плоскость α** .
2. Перпендикуляр, проведенный из данной точки к плоскости, меньше любой наклонной, проведенной из той же точки к этой плоскости. Длина перпендикуляра, проведенного из точки A к плоскости α , **называется расстоянием от точки A до плоскости α** .
3. **Углом между прямой и плоскостью**, пересекающей эту прямую и не перпендикулярной к ней, называется угол между прямой и ее проекцией на плоскость.

4. **Двугранным углом** называется фигура, образованная прямой a и двумя полуплоскостями с общей границей a , причем полуплоскости не принадлежат одной плоскости. Прямая a называется ребром двугранного угла.
5. Угол, образованный при сечении двугранного угла плоскостью, перпендикулярной его ребру, называется **линейным углом данного двугранного угла**.
6. Градусной мерой двугранного угла называется градусная мера его линейного угла.
7. Наименьший из четырех двугранных углов, образованных двумя пересекающимися плоскостями, называется **углом между плоскостями**.
8. **Теорема о трех перпендикулярах**. Прямая, проведенная в плоскости через основание наклонной перпендикулярно ее проекции, перпендикулярна и самой наклонной.
9. **Теорема, обратная теореме о трех перпендикулярах**. Прямая, проведенная в плоскости через основание наклонной перпендикулярно к ней, перпендикулярна и ее проекции.
10. **Теорема о трех синусах**. Синус угла, образованного прямой, лежащей в плоскости одной из граней двугранного угла, с другой гранью, равен произведению синуса двугранного угла на синус угла, который упомянутая прямая составляет с ребром двугранного угла.

Доказательство. Пусть в одной из граней двугранного угла, равного α , проведена прямая l , составляющая с ребром угол β , $0 < \beta < 90^\circ$. Пусть эта прямая образует угол γ со второй гранью двугранного угла. Докажем, что

$$\sin \gamma = \sin \alpha \cdot \sin \beta.$$

Выберем на одной из граней точку A (рис. 3). Проведем AB перпендикулярно ребру двугранного угла. Опустим перпендикуляр AC на вторую грань. Тогда по теореме о трех перпендикулярах BC тоже перпендикулярно ребру двугранного угла. Пусть точка D лежит на ребре двугранного угла, а прямая AD составляет угол β с BD . Тогда угол ADC — искомый, он равен γ . Из прямоугольного $\triangle ADB$

$$AB = AD \cdot \sin \beta.$$

Из прямоугольного $\triangle ABC$

$$AC = AB \cdot \sin \alpha = AD \cdot \sin \beta \sin \alpha.$$

Из прямоугольного $\triangle ADC$

$$\sin \gamma = \frac{AC}{AD} = \sin \beta \sin \alpha,$$

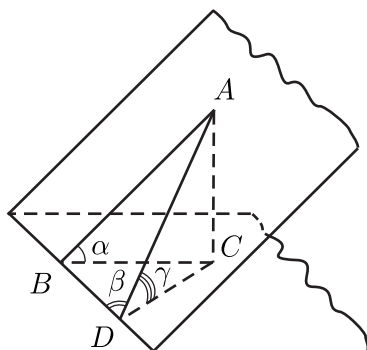


Рис. 3. Теорема о трех синусах

что и требовалось доказать.

11. **Проекцией** ¹⁾ **точки на плоскость** называется основание перпендикуляра, проведенного из этой точки к плоскости, если точка не лежит в плоскости, и сама точка, если она лежит в плоскости. На рисунке 4 точка M_1 — проекция точки M на плоскость α . Пусть F — какая-нибудь фигура в пространстве. Если построить проекции всех точек этой фигуры на данную плоскость, получится фигура F_1 , которая называется **проекцией фигуры F на данную плоскость**.

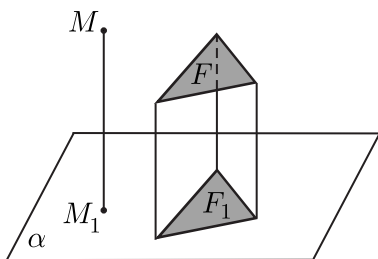


Рис. 4. Проекция точки и фигуры на плоскость

12. Площадь $S_{\text{пр}}$ ортогональной проекции многоугольника на плоскость равна площади $S_{\text{ф}}$ проектируемого многоугольника, умноженной на косинус угла φ между плоскостями многоугольника и его проекции:

$$S_{\text{пр}} = S_{\text{ф}} \cdot \cos \varphi. \quad (1.1)$$

¹⁾ Имеется в виду прямоугольная, или ортогональная проекция.

1.5. Перпендикулярность плоскостей.

1. **Две пересекающиеся плоскости называются перпендикулярными**, если угол между ними равен 90° .
2. Если одна из двух плоскостей проходит через прямую, перпендикулярную к другой плоскости, то такие плоскости перпендикулярны.
3. Плоскость, перпендикулярная к прямой, по которой пересекаются две данные плоскости, перпендикулярна к каждой из этих плоскостей.
4. Если две плоскости взаимно перпендикулярны, то прямая, проведенная в одной плоскости перпендикулярно линии пересечения плоскостей, перпендикулярна к другой плоскости.

1.6. Трехгранный угол.

1. Рассмотрим три луча OA , OB и OC , не лежащие в одной плоскости. Фигура, состоящая из углов AOB , BOC и COA и их внутренних областей, **называется трехгранным углом $OABC$** , а указанные углы — плоскими углами данного трехгранного угла.
2. Каждый плоский угол трехгранного угла меньше суммы двух других плоских углов.
3. Сумма плоских углов трехгранного угла меньше 360° .
4. **Теорема о трех косинусах.** Пусть α — величина угла между наклонной l и ее проекцией на плоскость τ , β — величина угла между проекцией наклонной l и прямой, проведенной через основание той же наклонной в плоскости проекции, и γ — величина угла между наклонной l и прямой, проведенной через ее основание в плоскости проекции. Справедливо следующее соотношение:

$$\cos \gamma = \cos \alpha \cos \beta. \quad (1.2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим трехгранный угол $OABC$ с вершиной в точке O , пусть $AO \perp BOC$ и $AC \perp BC$ (рис. 5). Тогда, очевидно, $OC \perp BC$. Обозначим $\angle ABO = \alpha$, $\angle OBC = \beta$, $\angle ABC = \gamma$. Из прямоугольного $\triangle ACB$

$$BO = AB \cdot \cos \alpha.$$

Из прямоугольного $\triangle BOC$

$$BC = BO \cdot \cos \beta = AB \cdot \cos \alpha \cos \beta.$$

Из прямоугольного $\triangle ACB$

$$AB \cos \gamma = BC.$$

Отсюда $\cos \gamma = \cos \alpha \cos \beta$.

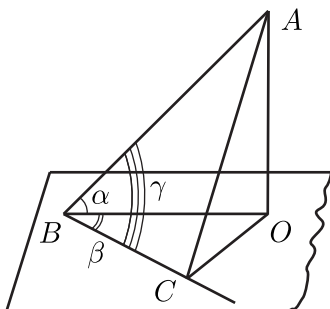


Рис. 5. Теорема о трех косинусах

5. Косинусы двугранных углов φ , ψ и θ , образованных гранями трехгранного угла, выражаются через плоские углы α , β и γ при его вершине формулами:

$$\cos \varphi = \frac{\cos \alpha - \cos \beta \cdot \cos \gamma}{\sin \beta \cdot \sin \gamma}, \quad \cos \psi = \frac{\cos \beta - \cos \gamma \cdot \cos \alpha}{\sin \gamma \cdot \sin \alpha},$$

$$\cos \theta = \frac{\cos \gamma - \cos \alpha \cdot \cos \beta}{\sin \alpha \cdot \sin \beta},$$

где φ , ψ и θ — величины двугранных углов, противолежащих граням с плоскими углами α ; ψ — грани с плоским углом β ; θ — грани с плоским углом α , β и γ соответственно.

§ 2. Куб

2.1. Основные определения и утверждения.

1. Объем куба $V = a^3$, где a — ребро куба.
2. Площадь поверхности куба $S = 6a^2$.
3. Диагональ куба — это отрезок, который соединяет противоположные вершины куба и проходит через центр куба. Диагональ куба равна $a\sqrt{3}$.

Так как вычисление площади поверхности и объема куба, а также различных углов не представляет проблемы, сразу перейдем к построению сечений, проходящих через три произвольно заданные точки.

2.2. Построение сечений. Площадь сечения. Для построения сечения используются следующие принципы:

- **Соединение точек:** Если две точки принадлежат одной грани, их можно соединить отрезком.

- **Метод следов:** Линия пересечения секущей плоскости с плоскостью грани называется *следом*. Она находится путем продления уже известных границ сечения.
- **Свойство параллельных граней:** Если секущая плоскость пересекает две параллельные грани, то линии пересечения (следы) параллельны друг другу.

Пример 2.1. Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Пусть на ребре $C_1 D_1$ задана точка K , на ребре CC_1 задана точка L , а на ребре AD — точка M , как показано на рис. 6. Построить сечение куба плоскостью, проходящей через точки K , L , M . РЕШЕНИЕ. Обозначим искомую

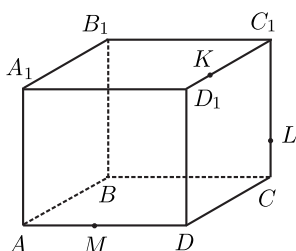


Рис. 6. К примеру 2.1.

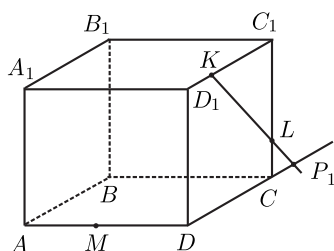


Рис. 7. К примеру 2.1.

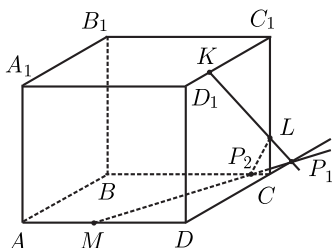


Рис. 8. К примеру 2.1.

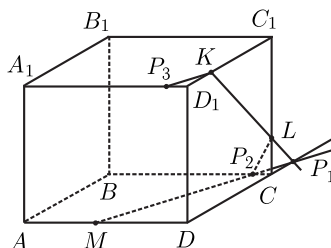


Рис. 9. К примеру 2.1.

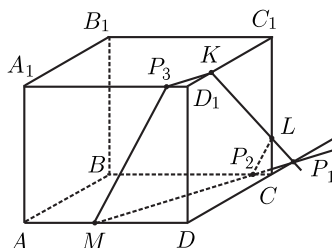


Рис. 10. К примеру 2.1.

плоскость α . Точки K и L лежат в плоскости DD_1C . Проведем через

эти точки прямую и продолжим ребро DC , также лежащее в плоскости DD_1C , до пересечения с этой прямой в точке P_1 (рис. 7). Отрезок KL — линия пересечения плоскости α с плоскостью DD_1C .

Точка P_1 принадлежит как плоскости ABC , так и плоскости сечения α . Проведем прямую MP_1 (рис. 8), по которой плоскость сечения пересекает плоскость ABC . Соединим точку P_2 — точку пересечения прямых MP_1 и BC — с точкой L . Отрезок P_2L — линия пересечения плоскости α и плоскости BB_1C . Плоскости ABC и $A_1B_1C_1$ параллельны, поэтому плоскость сечения пересекает их по параллельным прямым. Проведем в плоскости $A_1B_1C_1$ через точку K прямую, параллельную P_2M (рис. 9). Она пересекает A_1D_1 в точке P_3 . Соединяя P_3 и M , получаем сечение куба плоскостью α : KLP_2MP_3 (рис. 10).

Задача 2.2. Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Пусть на ребре AB задана точка K , на ребре $B_1 C_1$ задана точка L , а на ребре AA_1 — точка M , как показано на рис. 11. Постройте сечение куба плоскостью, проходящей через точки K , L , M .

Ответ: рис. 53.

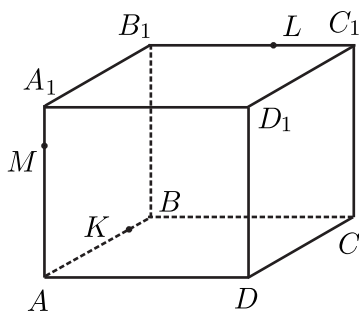


Рис. 11. К задаче 2.2.

Пример 2.3. Постройте сечение куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, проходящее через точку B , точку P , лежащую на ребре $B_1 C_1$, и точку Q , лежащую на грани $CC_1 D_1 D$, как показано на рисунке 12.

РЕШЕНИЕ. Точки B и P лежат на одной грани, поэтому плоскость сечения пересекает грань $BB_1 C_1 C$ по прямой BP . Продолжим эту прямую до пересечения с прямой CC_1 в точке K (рис. 13). Точка K также принадлежит грани $CC_1 D_1 D$, соединим ее с точкой Q и продолжим до пересечения с ребром DD_1 в точке N (при этом прямая пересечет ребро $C_1 D_1$ в точке M , рис. 14). Плоскость сечения пересекает параллельные плоскости по параллельным прямым, поэтому проведем прямую NL на грани $AA_1 D_1 D$ параллельно BP до пересечения с AD . Соединяя точки B и L и точки P и M , завершаем построение сечения (рис. 15).

Задача 2.4. Постройте сечение куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, проходящее через точку B , точку P , лежащую на ребре $B_1 C_1$, и точку Q , лежащую на грани $CC_1 D_1 D$, как показано на рисунке 16.

Ответ: рис. 54.

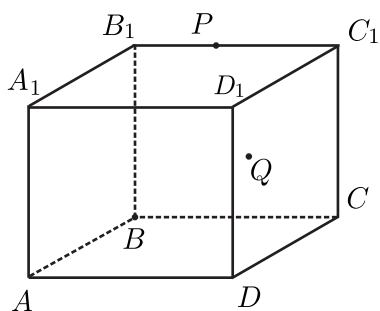


Рис. 12. К примеру 2.3.

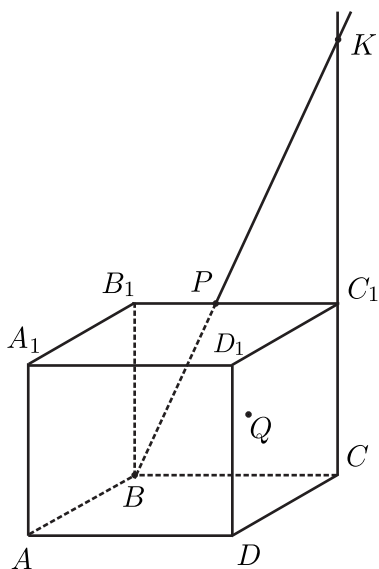


Рис. 13. К примеру 2.3.

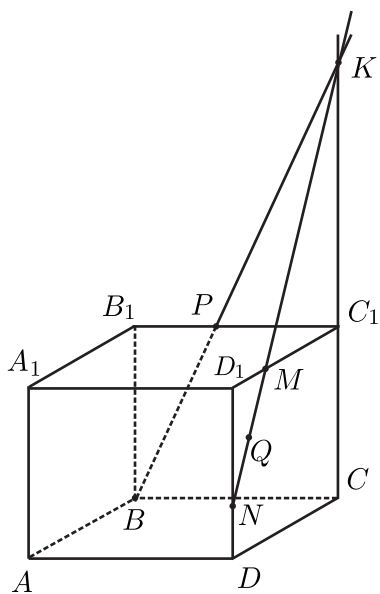


Рис. 14. К примеру 2.3.

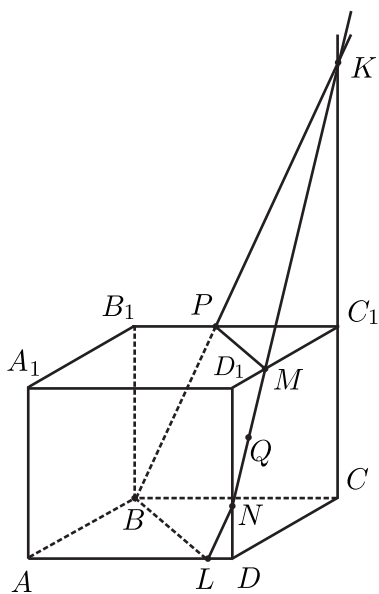


Рис. 15. К примеру 2.3.

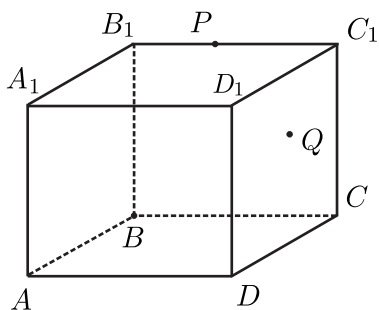


Рис. 16. К задаче 2.4.

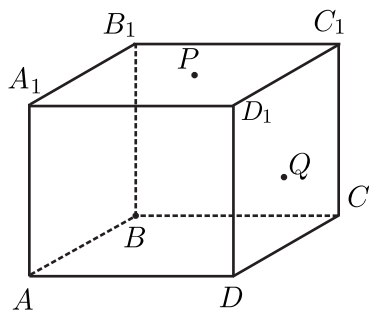


Рис. 17. К примеру 2.5.

Пример 2.5. Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Точка $P \in A_1 B_1 C_1$, точка $Q \in DD_1 C$ (рис. 17). Построить сечение куба плоскостью BPQ .

РЕШЕНИЕ. Пусть точки P' и Q' — проекции точек P и Q на плоскость ABC соответственно (рис. 18). Точку пересечения прямых PQ и $P'Q'$ обозначим M , M принадлежит плоскости ABC и плоскости сечения (рис. 19). Соединим точки B и M . Обозначим точку пересечения BM и DC как M_1 (рис. 20) и проведем прямую QM_1 . Точку пересечения QM_1 и $D_1 C_1$ обозначим M_2 (рис. 21). Проведем прямую $M_2 P$, ее точку пересечения с $A_1 B_1$ обозначим M_3 (рис. 22). Соединяя точки M_3 и B , завершаем построение сечения $BM_1 M_2 M_3$ (рис. 23).

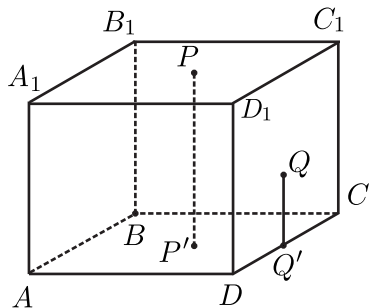


Рис. 18. К примеру 2.5.

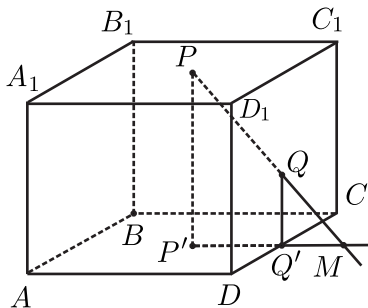


Рис. 19. К примеру 2.5.

Задача 2.6. Постройте сечение куба, проходящее через точки P , Q , R , где $P \in A_1 B_1 C_1$, $Q \in DD_1 C_1$, R делит ребро AB в отношении $1 : 4$, считая от точки A (рис. 24).

Ответ: сечение $RKLM$ на рис. 55.

Пример 2.7. Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ с ребром a , точка M — середина ребра $C_1 D_1$. Постройте сечение куба плоскостью $AB_1 M$ и найдите его площадь.

РЕШЕНИЕ. Построим сечение $AB_1 ML$ куба (рис. 25). Оно представляет собой равнобедренную трапецию. Действительно, если две параллельные плоскости $(AA_1 B_1$ и $DD_1 C_1)$ пересечены третьей, то ли-

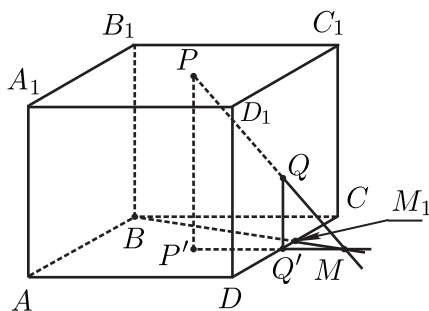


Рис. 20. К примеру 2.5.

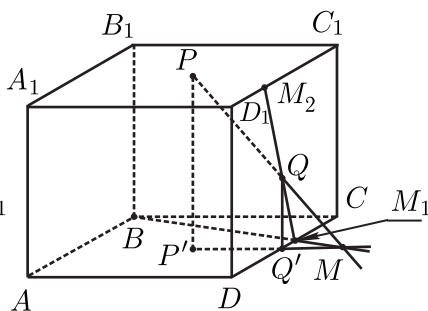


Рис. 21. К примеру 2.5.

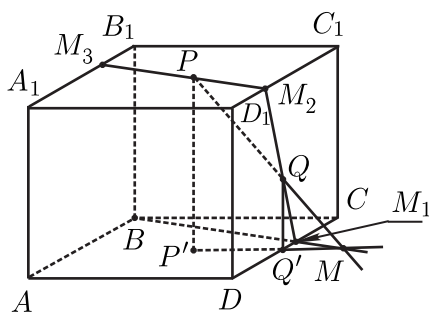


Рис. 22. К примеру 2.5.

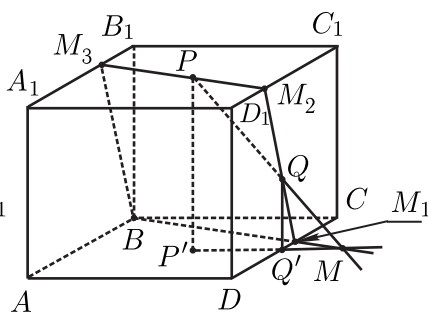


Рис. 23. К примеру 2.5.

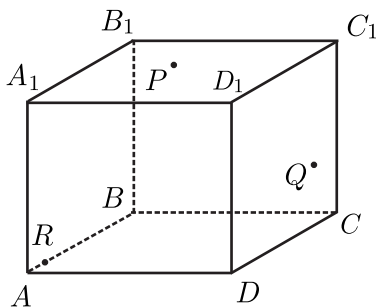


Рис. 24. К задаче 2.6.

нии пересечения плоскостей параллельны, поэтому $AB_1 \parallel LM$. Кроме того, $\triangle ADL = \triangle B_1C_1M$ по двум катетам, поэтому трапеция равнобедренная. Ее боковую сторону можно найти из $\triangle B_1MC_1$: $B_1M = \sqrt{B_1C_1^2 + MC_1^2} = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$. В равнобедренной трапеции B_1MLA (рис. 26) проведем высоты MH_1 и LH_2 , они отсекают равные отрезки B_1H_1 и H_2A . Отрезок $B_1H_1 = \frac{B_1A - ML}{2} = \frac{1}{2} \left(a\sqrt{2} - \frac{a\sqrt{2}}{2} \right)$.

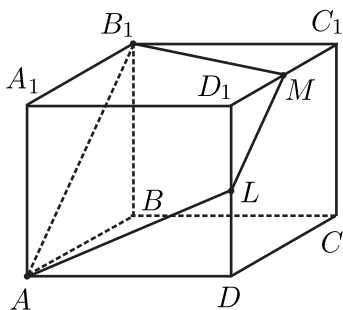


Рис. 25. К примеру 2.7.

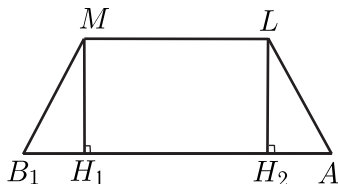


Рис. 26. К примеру 2.7.

В $\triangle B_1MH_1$ по теореме Пифагора высота трапеции

$$MH_1 = \sqrt{B_1M^2 - B_1H_1^2} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{4}\right)^2} = \frac{3a}{2\sqrt{2}}.$$

Отсюда площадь сечения

$$S = \frac{1}{2} \left(\frac{a\sqrt{2}}{2} + a\sqrt{2} \right) \cdot \frac{3a}{2\sqrt{2}} = \frac{9a^2}{8}.$$

Ответ: $\frac{9a^2}{8}$.

Задача 2.8. Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ с ребром a , точка M — середина ребра CC_1 .

- а) Постройте сечение куба плоскостью AB_1M ;
б) Найдите площадь сечения.

Ответ: а) рис. 56; б) $\frac{9a^2}{8}$.

Пример 2.9. Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ с ребром a , точки K и M — середины ребер B_1C_1 и D_1C_1 соответственно.

- а) Постройте сечение куба плоскостью AKM ;
б) Найдите площадь сечения.

РЕШЕНИЕ. а) Обозначим плоскость сечения α . Соединим точки K и M (рис. 27). Поскольку плоскости ABC и $A_1B_1C_1$ параллельны, то плоскость сечения пересекает их по параллельным прямым. Проведем через точку A прямую, параллельную KM , которая пересекается с прямой CD в точке Q , принадлежащей сечению. Соединим точки M и Q (рис. 28). Пусть точка L — точка пересечения MQ и DD_1 . Соединяя точки L и A , получим линию пересечения плоскости сечения и плоскости AA_1D_1 . Плоскость BB_1C_1 параллельна плоскости AA_1D_1 , поэтому линия пересечения плоскости α и плоскости BB_1C_1 параллельна AL . Проведем через точку K прямую $KP \parallel LA$. Соединяя точки P и A , завершаем построение сечения куба плоскостью α .

- б) Разобьем сечение на $\triangle APL$ и равнобокую трапецию $PKML$.

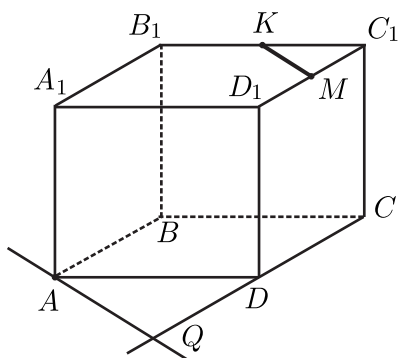


Рис. 27. К примеру 2.9.

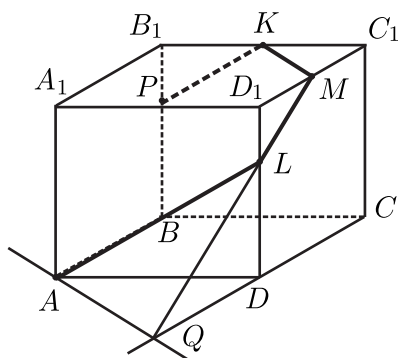


Рис. 28. К примеру 2.9.

Треугольники ADQ и BCD равны по стороне и двум прилежащим углам, поэтому $QD = DC = a$. Из подобия $\triangle D_1LM$ и $\triangle DLQ$ следует, что $D_1L = \frac{a}{3}$, а $LD = \frac{2}{3}a$. Отрезок $D_1M = \frac{a}{2}$, тогда в $\triangle D_1ML$ гипотенуза $LM = \frac{\sqrt{13}a}{6}$.

В равнобокой трапеции $PKML$ основания $PL = a\sqrt{2}$, $KM = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, высота равна $\frac{a}{6}\sqrt{\frac{17}{2}}$. Тогда площадь трапеции равна $\frac{a^2\sqrt{17}}{8}$.

В $\triangle ADL$ гипотенуза $AL = \frac{a\sqrt{13}}{3}$. Высота $\triangle APL$ равна $\frac{a}{3}\sqrt{\frac{17}{2}}$. Следовательно, $S_{APL} = \frac{a^2\sqrt{17}}{6}$. Тогда площадь сечения $\frac{7\sqrt{17}a^2}{24}$.

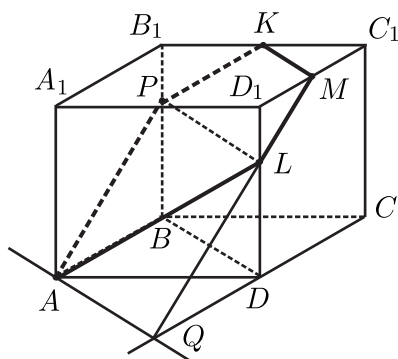


Рис. 29. К примеру 2.9.

Ответ: а) рис. 29; б) $\frac{7\sqrt{17}a^2}{24}$.

Задача 2.10. Дан куб $ABCA_1B_1C_1D_1$ с ребром a , точки L и M — середины ребер AA_1 и D_1C_1 соответственно.

а) Постройте сечение куба плоскостью LB_1M ;

б) Найдите площадь сечения.

Ответ: а) рис. 57; б) $\frac{3a^2\sqrt{21}}{16}$.

Пример 2.11. Постройте сечение куба $ABCA_1B_1C_1D_1$ плоскостью, проходящей через точки MNK , где точка $M \in A_1B_1$, $A_1M = MB_1$, точка $N \in DD_1$, $ND = \frac{DD_1}{3}$, точка K — пересечение прямых D_1C и C_1D . Найдите длину отрезка прямой, по которому плоскость сечения пересекает грань куба BB_1C_1 , сторона куба равна a .

РЕШЕНИЕ. Точки N и K лежат в плоскости грани DD_1C_1 (рис. 30),

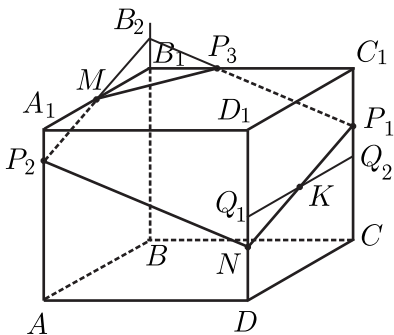


Рис. 30. К примеру 2.11.

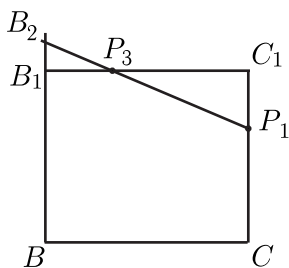


Рис. 31. К примеру 2.11.

поэтому прямая NK — линия пересечения плоскости DD_1C_1 и плоскости сечения, пересекающая ребро CC_1 в точке P_1 . Так как плоскости AA_1B_1 и DD_1C_1 параллельны, то плоскость сечения пересекает их по параллельным прямым. Проводя через точку M прямую, параллельную NK , получаем в пересечении с AA_1 точку P_2 . Далее соединяем точки P_2 и N , поскольку они лежат в плоскости AA_1D_1 . Плоскости AA_1D_1 и BB_1C_1 также параллельны, поэтому плоскость сечения пересекает BB_1C_1 по прямой, параллельной P_2N . Проведем $P_1P_3 \parallel P_2N$. Соединяя точки M и P_3 , завершаем построение сечения $P_1NP_2MP_3$.

Плоскость сечения пересекает грань BB_1C_1 по прямой P_1P_3 . Найдём длину отрезка P_1P_3 . Проведем через точку K отрезок $Q_1Q_2 \parallel DC$ (рис. 30). $\triangle P_1KQ_2 = \triangle NKQ_1$, поэтому $P_1Q_2 = Q_1N = \frac{a}{2} - \frac{a}{3} = \frac{a}{6}$. Продолжим P_2M и BB_1 до пересечения в точке B_2 . $\triangle KP_1Q_2 = \triangle MB_1B_2$, поэтому $B_1B_2 = Q_2P_1 = \frac{a}{6}$. Треугольники $\triangle P_1P_3C_1$ $\triangle B_2P_3B_1$ подобны (рис. 31). Поскольку $C_1P_1 = \frac{a}{3}$, $B_1B_2 = \frac{a}{6}$, то

$P_3C_1 = \frac{2}{3}a$. Следовательно,

$$P_2P_1 = \sqrt{\left(\frac{2}{3}a\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^2} = \frac{a\sqrt{5}}{3}.$$

Ответ: $\frac{a\sqrt{5}}{3}$.

Задача 2.12. Постройте сечение куба $ABCA_1B_1C_1D_1$ с ребром a плоскостью, проходящей через точки B , D_1 и K , где точка $K \in DCC_1$ и находится на равном расстоянии от ребер DD_1 и CC_1 , а расстояния до ребер D_1C_1 и DC относятся как $2 : 1$. Найдите длину отрезка, по которому это сечение пересекает грань $A_1B_1C_1$.

Ответ: $\frac{a\sqrt{17}}{4}$.

Задача 2.13. Постройте сечение куба $ABCA_1B_1C_1D_1$ плоскостью, проходящей через точки D , M и N , где точка $M \in A_1D_1$, $A_1M = MD_1$, точка $N \in BB_1$, $NB = B_1N$ и найдите периметр этого сечения, если ребро куба равно 1.

Ответ: $\frac{3\sqrt{5} + 5}{4} + \frac{5 + \sqrt{13}}{6}$.

Задача 2.14. МГУ, геологический ф-т, 2002 (июль), №8(8).

В кубе $ABCA_1B_1C_1D_1$ с длиной ребра, равной 1, на вертикальном ребре AA_1 и на горизонтальном ребре AB отмечены точки M и N соответственно, при этом $AM = \frac{1}{3}$, $AN = \frac{3}{4}$. Через точки M и N проведена плоскость, параллельная диагонали AC нижнего основания куба. Чему равна площадь получившегося сечения?

Ответ: $\frac{31}{288}\sqrt{113}$.

2.3. Угол между плоскостями.

Пример 2.15. Постройте сечение куба $ABCA_1B_1C_1D_1$ плоскостью, проходящей через точки A и K параллельно A_1C_1 , где точка $K \in C_1D_1$, $C_1K : KD_1 = 3 : 1$. Найдите угол, который образует плоскость сечения с плоскостью ABC .

Решение. В силу того, что сечение проходит через точку A параллельно A_1C_1 , оно пересекает плоскость ABC по прямой AC (рис. 32). Отрезок $CK \in DD_1C_1$. Через точку K проведем прямую $KL \parallel A_1C_1$, поскольку плоскость сечения параллельна A_1C_1 . Соединяя точки A и L , завершаем построение сечения.

Линейным углом двугранного угла является угол между перпендикулярами в плоскостях, восстановленными из точки O на линии пересече-

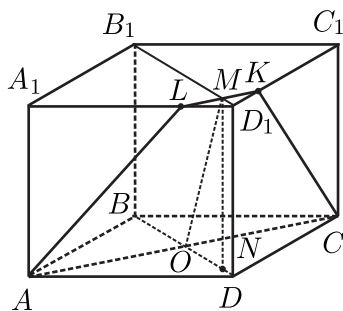


Рис. 32. К примеру 2.15.

ния плоскостей. Действительно, $OD \perp AC$, так как $ABCD$ — квадрат, $MO \perp AC$ по теореме о трех перпендикулярах, где M — точка пересечения LK и B_1D_1 . Пусть N — проекция точки M на плоскость ABD . Рассмотрим $\triangle OMN$. Пусть $MN = a$, тогда $ON = OD - ND = OD - MD_1$, $MD_1 = \frac{a\sqrt{2}}{8}$ из прямоугольного равнобедренного $\triangle LKD_1$, где $LD_1 = \frac{a}{4}$. Следовательно, $OD = \frac{3a\sqrt{2}}{8}$,

$$\operatorname{tg} \angle MON = \frac{4\sqrt{2}}{3}.$$

$$\text{Ответ: } \operatorname{arctg} \frac{4\sqrt{2}}{3}.$$

Задача 2.16. Постройте сечение куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ плоскостью, проходящей через точки A , B_1 и K , где точка $K \in BC$, $BK = KC$. Найдите угол, который образует плоскость сечения с плоскостью ABC .

Ответ: $\operatorname{arctg} \sqrt{5}$.

Пример 2.17. [111] Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$.

а) Постройте сечение куба плоскостью, проходящей через точки B , A_1 и D_1 .

б) Найдите угол между плоскостями BA_1C_1 и BA_1D_1 .

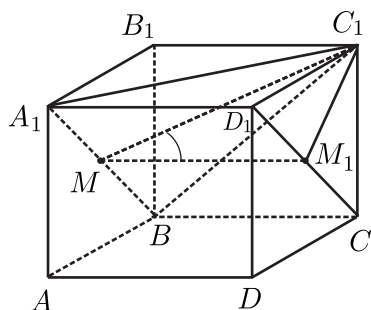


Рис. 33. К примеру 2.17.

Решение. а) Для построения сечения соединим в кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ точки A_1 и B . Плоскость сечения пересекает грань DCC_1 по прямой, параллельной A_1B и проходит через точку D_1 , значит линия пересечения — D_1C (рис. 33). Таким образом, искомое сечение — $A_1 D_1 C B$.

б) Пересечением плоскости BA_1C_1 и куба является равносторонний треугольник $A_1 B C_1$. Линией пересечения плоскостей BA_1C_1 и BA_1D_1 является прямая BA_1 . Опустим перпендикуляр $C_1 M$ на BA_1 , точка M — середина BA_1 , так как треугольник сечения равносторонний. Пусть M_1 — середина отрезка $D_1 C$, тогда $MM_1 \parallel AD$ и лежит в плоскости $A_1 D_1 C B$. $AD \perp AA_1 B_1 \Rightarrow MM_1 \perp AA_1 D_1$, тогда MM_1 перпендикулярна любой прямой, лежащей в плоскости $AA_1 D_1$, откуда $MM_1 \perp A_1 B$. Таким образом, $\angle C_1 M M_1$ — искомый линейный угол.

Рассмотрим прямоугольный треугольник $C_1 M M_1$. Пусть сторона куба равна a , тогда $MM_1 = a$, $C_1 M_1 = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, $\operatorname{tg} \angle C_1 M M_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

$$\text{Ответ: б) } \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{2}} = \arccos \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Задача 2.18. [111] Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$.

а) Постройте сечение куба плоскостью, проходящей через середины его ребер AB , $B_1 C_1$ и AD .

б) Найдите угол между плоскостью $A_1 B D$ и плоскостью, проходящей через середины ребер AB , $B_1 C_1$ и AD .

Ответ: $\arctg 2\sqrt{2}$.

Пример 2.19. [115] В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ все ребра равны 5. На его ребре BB_1 отмечена точка K так, что $KB = 4$. Через точки K и C_1 проведена плоскость α , параллельная прямой BD_1 .

а) Докажите, что $A_1 P : PB_1 = 3 : 1$, где P — точка пересечения плоскости α с ребром $A_1 B_1$.

б) Найдите угол наклона плоскости α к плоскости грани $BB_1 C_1 C$.

РЕШЕНИЕ. а) Поскольку плоскость α параллельна BD_1 , она пересекает

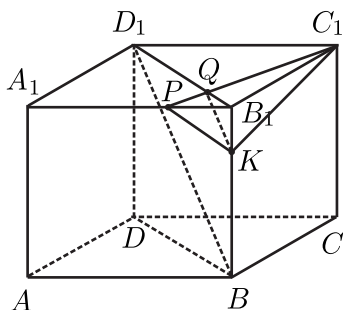


Рис. 34. К примеру 2.19.

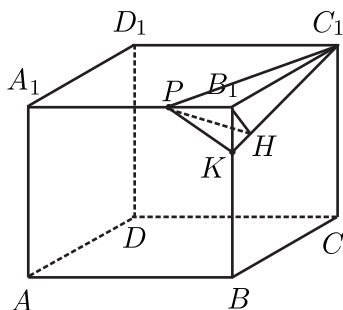


Рис. 35. К примеру 2.19.

плоскость $DD_1 B_1$ по прямой $KQ \parallel BD_1$, где точка Q лежит на $B_1 D_1$ (рис. 34). Проведем прямую $C_1 Q$ до пересечения с ребром $A_1 B_1$ в точке P . Из подобия $\triangle BB_1 D_1$ и $\triangle KB_1 Q$ следует, что $B_1 Q = \frac{1}{5} B_1 D_1 = \sqrt{2}$. Далее, $\triangle PQ B_1$ подобен $\triangle C_1 Q D_1$ по первому признаку подобия. Отсюда

$$\frac{PB_1}{C_1 D_1} = \frac{B_1 Q}{D_1 Q} \Rightarrow PB_1 = 5 \cdot \frac{\sqrt{2}}{4\sqrt{2}} = \frac{5}{4} \Rightarrow A_1 P = 5 - \frac{5}{4} = \frac{15}{4}.$$

Тогда

$$\frac{A_1 P}{PB_1} = \frac{15}{4} : \frac{5}{4} = 3 : 1.$$

б) Построим линейный угол двугранного угла между плоскостями α и $BB_1 C_1 C$. Отметим, что $PB_1 \perp BB_1 C$, поэтому, если провести высоту $B_1 H$ в $\triangle KB_1 C_1$, то PH будет перпендикулярно KC_1 по теореме о трех перпендикулярах. Следовательно, $\angle PH B_1$ является искомым линейным углом. Рассмотрим прямоугольный $\triangle KB_1 C_1$. По теореме Пифагора $KC_1 = \sqrt{26}$. Площадь $S_{KB_1 C_1} = \frac{5}{2}$, значит, $B_1 H = \frac{5}{\sqrt{26}}$.

Тогда из $\triangle PB_1H$ находится $\operatorname{tg} \angle PHB_1 = \frac{\sqrt{26}}{4}$.

Ответ: б) $\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{26}}{4}$.

Задача 2.20. [75] В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ все ребра равны 3. На его ребре BB_1 отмечена точка K так, что $KB = 2$. Через точки K и C_1 проведена плоскость α , параллельная прямой BD_1 .

а) Докажите, что плоскость α проходит через середину ребра $A_1 B_1$.

б) Найдите угол наклона плоскости α к плоскости грани $BB_1 C_1 C$.

Ответ: $\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{10}}{2}$.

2.4. Угол между прямой и плоскостью.

Пример 2.21. [113] В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ найдите синус угла между прямой AB и плоскостью $CB_1 D_1$.

РЕШЕНИЕ. Пусть сторона куба равна a . Угол между прямой и плоскостью $CB_1 D_1$ совпадает с углом между этой плоскостью и прямой CD в силу параллельности ребер (рис. 36). Треугольник сечения равнобедренный со стороной $a\sqrt{2}$, перпендикуляр, опущенный из точки D на плоскость сечения, попадет в точку O — центр треугольника $CB D_1$.

Угол α между плоскостью $CB_1 D_1$ и прямой DC есть угол между прямой DC и ее проекцией на плоскость CDB_1 :

$$\cos \alpha = \frac{OC}{DC} = \frac{a\sqrt{2} \frac{\sqrt{3}}{3}}{a}.$$

Тогда искомый синус угла есть

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

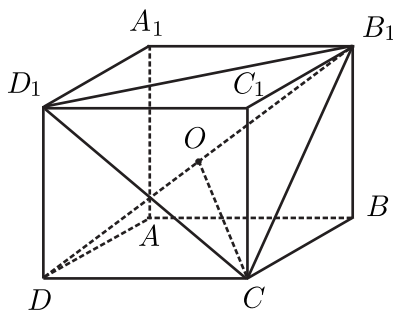


Рис. 36. К примеру 2.21.

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Задача 2.22. [113] В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ найдите тангенс угла между прямой AC_1 и плоскостью BDD_1 .

Ответ: $\sqrt{2}$.

2.5. Угол между прямыми в пространстве.

Пример 2.23. Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Найдите угол между прямыми AB_1 и BC_1 (скрещивающимися диагоналями смежных граней, рис. 37).

РЕШЕНИЕ. По определению угол между скрещивающимися прямыми AB_1 и BC_1 равен углу между BC_1 и $C_1 D \parallel B_1 A$ (рис. 38). Соединяя точки B и D , получаем равнобедренный $\triangle BC_1 D$, следовательно, искомый угол равен 60° .

Ответ: 60° .

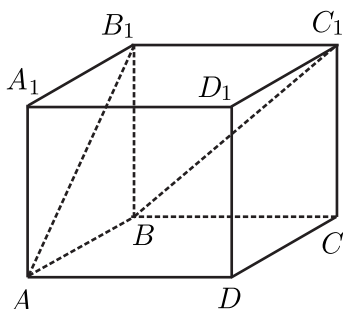


Рис. 37. К примеру 2.23.

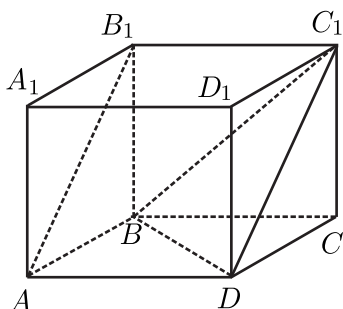


Рис. 38. К примеру 2.23.

Задача 2.24. Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Найдите угол между прямой $A_1 B$ и прямой, соединяющей середины ребер $C_1 C$ и CD .

Ответ: 90° .

Пример 2.25. Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Найдите угол между прямыми $A_1 B$ и $B_1 D$.

РЕШЕНИЕ. Добавим к имеющемуся кубу еще сверху куб с такими же ребрами (рис. 39). Проведем $B_1 A_2 \parallel BA_1$. Тогда по определению угла между скрещивающимися прямыми $\angle A_2 B_1 D$ — искомый. Соединяя точки A_2 и D , получаем $\triangle A_2 B_1 D$ с искомым углом. Пусть сторона куба равна a , тогда $A_2 B_1 = a\sqrt{2}$, $B_1 D = a\sqrt{3}$. Из прямоугольного $\triangle AA_2 D$ получаем, что $A_2 D = a\sqrt{5}$. По теореме, обратной теореме Пифагора, $\triangle A_2 B_1 D$ прямоугольный, следовательно, искомый угол равен 90° .

Ответ: 90° .

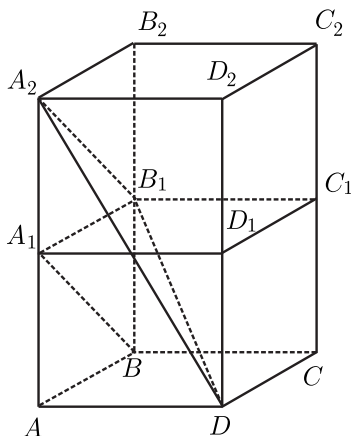


Рис. 39. К примеру 2.25.

Задача 2.26. Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Найдите угол между прямыми $B_1 D$ и прямой, соединяющей точку B и середину ребра AA_1 .

Ответ: $\arccos \frac{1}{\sqrt{15}}$.

2.6. Расстояние от точки до плоскости.

Пример 2.27. Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ с единичным ребром. Найдите расстояние от точки B до плоскости $AB_1 C$.

РЕШЕНИЕ. Найдем расстояние от точки B до плоскости $AB_1 C$ как высоту тетраэдра $B_1 ABC$, опущенную из точки B (рис. 40). Ее можно найти, зная площадь основания и объем тетраэдра. Объем тетраэдра

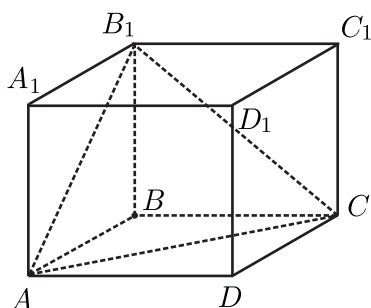


Рис. 40. К примеру 2.27.

$$V = \frac{1}{3} BB_1 \cdot S_{ABC} = \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}.$$

С другой стороны,

$$V = \frac{1}{3} h \cdot S_{AB_1C} = \frac{1}{3} h \cdot \frac{(\sqrt{2})^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{6},$$

где h — искомое расстояние. Приравнявая два выражения для объема, получаем, что $h = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Задача 2.28. Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ с единичным ребром. Найдите расстояние от точки B до плоскости AMC , где точка M — середина ребра BB_1 .

Ответ: $\frac{\sqrt{6}}{6}$.

Задача 2.29. Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ с единичным ребром. Найдите расстояние от середины ребра BB_1 до плоскости AB_1C .

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{6}$.

Пример 2.30. Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ с единичным ребром. Найдите расстояние от точки D до плоскости AB_1C .

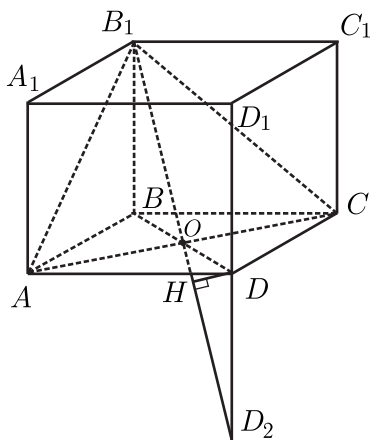


Рис. 41. К примеру 2.30.

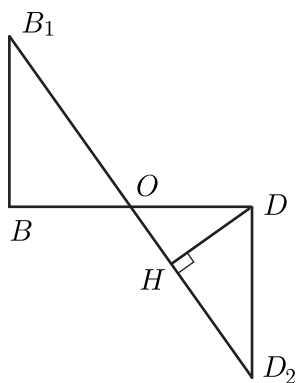


Рис. 42. К примеру 2.30.

РЕШЕНИЕ. Пусть O — центр основания куба (рис. 41). Продолжим отрезок B_1O до пересечения с прямой D_1D в точке D_2 (точки B , B_1 , O ,

D, D_1 лежат в одной плоскости α). Отметим, что диагональ основания AC перпендикулярна плоскости α по признаку перпендикулярности прямой и плоскости, так как она перпендикулярна OD и DD_1 . В $\triangle ODD_2$ проведем высоту DH (рис. 42). Это будет перпендикуляр из точки D к плоскости AB_1C , поскольку $DH \perp D_2O$ по построению и AC , как было показано выше. Треугольники BB_1O и DD_2O равны по катету и острому углу. Следовательно, $DH = \frac{2S_{BB_1O}}{B_1O} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Задача 2.31. Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ с ребром a . Найдите расстояние от точки D_1 до плоскости AB_1C .

Ответ: $\frac{2a\sqrt{3}}{3}$.

Пример 2.32. ЕГЭ-2022, основной вариант, №13.

В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ точки M и N являются серединами ребер AB и AD соответственно.

а) Докажите, что прямые B_1N и CM перпендикулярны.

б) Плоскость α проходит через точки N и B_1 параллельно прямой CM . Найдите расстояние от точки C до плоскости α , если $B_1N = 3\sqrt{5}$.

РЕШЕНИЕ. Соединим точки B и N (рис. 43). Докажем, что $BN \perp CM$. Пусть точка Q — точка пересечения BN и CM . Треугольники CBM и ABN равны по двум катетам, откуда $\angle BCM = \angle ABN = \varphi$ (рис. 44), $\angle BCM + \angle BMC = 90^\circ \Rightarrow \angle ABN + \angle BMC = 90^\circ$. Тогда из треугольника BQM получаем, что $\angle BQM = 90^\circ$, то есть $BN \perp CM$. А так как BN является проекцией B_1N на плоскость ABC , то по теореме о трех перпендикулярах B_1N и CM перпендикулярны.

б) По условию плоскость α параллельна прямой CM , следовательно, можно искать расстояние от любой точки прямой до плоскости. Опустим перпендикуляр QH из точки $Q \in CM$ на прямую B_1N , это и будет перпендикуляр на плоскость α (рис. 45). Действительно, QH перпендикулярен CM , так как лежит в плоскости $BB_1N \perp CM$, и перпендикулярен $B_1N \in \alpha$ по построению. По признаку перпендикулярности прямой и плоскости QH есть искомый перпендикуляр. Пусть ребро куба равно a . Тогда из $\triangle ABN$ получаем, что $BN = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} = a\frac{\sqrt{5}}{2}$. Рассмотрим $\triangle BB_1N$ (рис. 45):

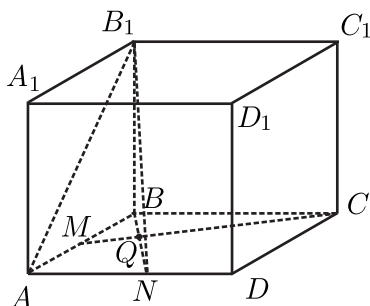


Рис. 43. К примеру 2.32.

$$BB_1^2 + BN^2 = B_1N^2 \iff a^2 + \frac{5a^2}{4} = (3\sqrt{5})^2,$$

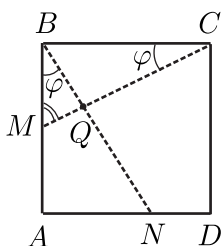


Рис. 44. К примеру 2.32.

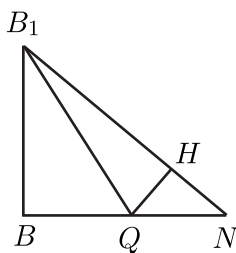


Рис. 45. К примеру 2.32.

откуда $a = 2\sqrt{5}$, тогда $BN = 5$, $BB_1 = 2\sqrt{5}$.

Далее, $\operatorname{tg} \varphi = \frac{1}{2}$, тогда $\cos \varphi = \frac{2}{\sqrt{5}}$ (рис. 44). Отсюда из прямоугольного $\triangle MBQ$ имеем $BQ = \frac{a}{2} \cdot \cos \varphi = 2$, значит, $QN = 3$. Из треугольника BB_1N найдем $\sin BNB_1 = \frac{BB_1}{B_1N} = \frac{2}{3}$, тогда

$$QH = QN \sin BNB_1 = 3 \cdot \frac{2}{3} = 2.$$

Ответ: б) 2.

Задача 2.33. ЕГЭ-2022, основной вариант, №13.

В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ точки M и N являются серединами ребер AB и AD соответственно.

а) Докажите, что прямые B_1N и CM перпендикулярны.

б) Плоскость α проходит через точки N и B_1 параллельно прямой CM . Найдите расстояние от точки C до плоскости α , если $B_1N = 6$.

Ответ: б) $\frac{4\sqrt{5}}{5}$.

2.7. Расстояние от точки до прямой.

Пример 2.34. Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ с единичным ребром. Найдите расстояние от точки B до прямой A_1D .

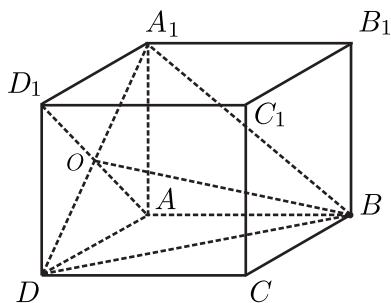


Рис. 46. К примеру 2.34.

РЕШЕНИЕ. Расстояние от точки до прямой определяется как длина перпендикуляра, опущенного из этой точки на прямую. Можно построить треугольник A_1BD , в котором искомый перпендикуляр будет высотой (рис. 46). Треугольник A_1BD равносторонний со стороной $\sqrt{2}$, поэтому высота в равностороннем треугольнике $BO = \frac{\sqrt{6}}{2}$.

Ответ: $\frac{\sqrt{6}}{2}$.

Задача 2.35. Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ с единичным ребром. Найдите расстояние от середины ребра AB до прямой $A_1 D$.

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Пример 2.36. [75] Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ с ребром $2\sqrt{2}$. Точки M и T — середины ребер AD и $A_1 B_1$ соответственно.

а) Докажите, что $A_1 C_1 \perp MT$.

б) Найдите расстояние от середины ребра $B_1 C_1$ до прямой MT .

РЕШЕНИЕ. а) Пусть точка N — середина ребра AB (рис. 47). Тогда отрезок NM — средняя линия $\triangle ABD$, $NM \parallel BD$. $AC \perp BD$ как диагонали квадрата, отсюда $A_1 C_1 \perp BD$, следовательно, $A_1 C_1 \perp NM$. Кроме того, $TN \perp A_1 C_1$, так как $TN \perp ABC$. Тогда $A_1 C_1 \perp TN$ по признаку перпендикулярности прямой и плоскости. Прямая MT лежит в плоскости TNM , следовательно, $A_1 C_1 \perp MT$.

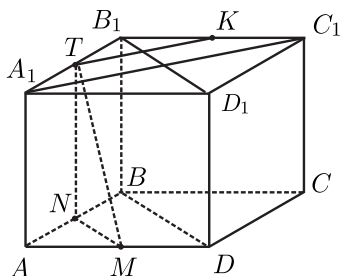


Рис. 47. К примеру 2.36.

б) Пусть точка K — середина ребра $B_1 C_1$. Искомое расстояние — это расстояние от точки K до прямой MT . В $\triangle A_1 B_1 C_1$ отрезок TK — средняя линия треугольника, следовательно, $TK \parallel A_1 C_1$. В пункте а) доказано, что $A_1 C_1 \perp MT$. Так как $TK \parallel A_1 C_1$, то и $TK \perp MT$. Это означает, что длина отрезка TK является расстоянием от точки K до прямой MT .

Найдем длину TK . Сначала найдем длину диагонали грани $A_1 B_1 C_1 D_1$. Сторона квадрата $A_1 B_1 C_1 D_1$ равна $2\sqrt{2}$, следовательно, $A_1 C_1 = 4$, $TK = \frac{1}{2} A_1 C_1 = \frac{1}{2} \cdot 4 = 2$.

Ответ: б) 2.

Задача 2.37. [75] Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Длина ребра куба равна 1.

а) Докажите, что расстояние от середины отрезка BC_1 до плоскости $AB_1 D_1$ равно расстоянию середины отрезка BC_1 до прямой, проходящей через середину отрезка AD_1 и вершину B_1 .

б) Найдите это расстояние.

Ответ: б) $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Задача 2.38. [75] В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ с ребром, равным 6, на ребре AA_1 взята точка M так, что $\frac{AM}{MA_1} = \frac{1}{2}$. На ребре $D_1 C_1$ взята точка N так, что $\frac{D_1 N}{NC_1} = \frac{1}{2}$.

а) Докажите, что прямые MB_1 и CN перпендикулярны.

б) Найдите расстояние от точки M до прямой CN .

Ответ: б) $2\sqrt{\frac{166}{13}}$.

2.8. Расстояние между прямыми.

Пример 2.39. ЕГЭ-2022, основная волна, №13.

В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ отмечены середины M и N отрезков AB и AD соответственно.

а) Докажите, что прямые $B_1 N$ и CM перпендикулярны.

б) Найдите расстояние между этими прямыми, если $B_1 N = 3\sqrt{5}$.

РЕШЕНИЕ.

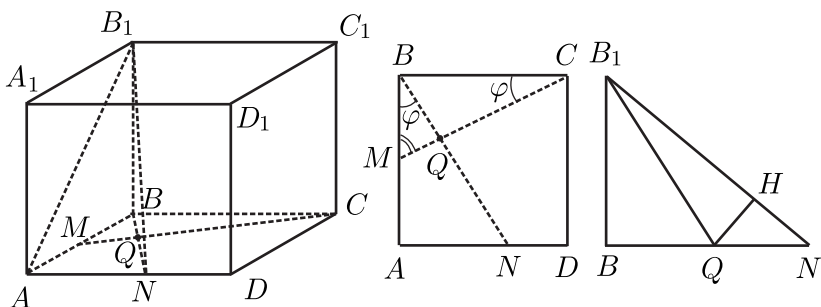


Рис. 48. К примеру 2.39.

а) Разобрано в примере 2.32.

б) Пусть Q — точка пересечения отрезков BN и CM (рис. 48). Прямая CM перпендикулярна плоскости BB_1N , так как она перпендикулярна двум пересекающимся прямым (BB_1 и BN), лежащим в этой плоскости. Следовательно, она перпендикулярна любой прямой, лежащей в этой плоскости. Опустим перпендикуляр QH из точки $Q \in CM$ на прямую B_1N , это и будет искомым расстоянием. Действительно, QH перпендикулярен CM , так как лежит в плоскости BB_1N , и перпендикулярен B_1N по построению.

Пусть ребро куба равно a . Тогда из $\triangle ABN$ получаем, что $BN = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} = a\frac{\sqrt{5}}{2}$. Рассмотрим $\triangle BB_1N$:

$$BB_1^2 + BN^2 = B_1N^2 \iff a^2 + \frac{5a^2}{4} = (3\sqrt{5})^2,$$

откуда $a = 2\sqrt{5}$, тогда $BN = 5$, $BB_1 = 2\sqrt{5}$.

Далее, $\operatorname{tg} \varphi = \frac{1}{2}$, тогда $\cos \varphi = \frac{2}{\sqrt{5}}$, тогда из $\triangle MBQ$ $BQ = \frac{a}{2} \cdot \cos \varphi = 2$, значит, $QN = 3$. Из треугольника BB_1N найдем

$$\sin BNB_1 = \frac{BB_1}{B_1N} = \frac{2}{3}, \text{ тогда}$$

$$QH = QN \sin BNB_1 = 3 \cdot \frac{2}{3} = 2.$$

Ответ: 2.

Задача 2.40. [75] В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ отмечены точки M и N — середины сторон AB и AD соответственно.

а) Докажите, что прямые B_1N и CM перпендикулярны.

б) Найдите расстояние между этими прямыми, если $B_1N = 7\sqrt{2}$.

Ответ: б) $\frac{14\sqrt{10}}{15}$.

Пример 2.41. [75] ЕГЭ-2018, основная волна, резервный день, №14. В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ все ребра равны 6.

а) Докажите, что угол между прямыми AC и BC_1 равен 60° .

б) Найдите расстояние между прямыми AC и BC_1 .

РЕШЕНИЕ. а) Пусть P_1 — середина BC , P_2 — середина CC_1 , P_3 — середина AB (рис. 49). По свойству средней линии треугольника:

$$P_3P_1 \parallel AC, \quad P_3P_1 = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2} \cdot 6\sqrt{2} = 3\sqrt{2};$$

$$P_1P_2 \parallel BC_1, \quad P_1P_2 = \frac{1}{2}BC_1 = \frac{1}{2} \cdot 6\sqrt{2} = 3\sqrt{2}.$$

Угол между прямыми AC и BC_1 равен углу между прямыми P_3P_1 и P_1P_2 . Найдем длину стороны P_3P_2 . В прямоугольном $\triangle P_3BC$:

$$P_3C = \sqrt{P_3B^2 + BC^2} = \sqrt{3^2 + 6^2} = 3\sqrt{5}.$$

В прямоугольном $\triangle P_3CP_2$:

$$P_3P_2 = \sqrt{P_3C^2 + CP_2^2} = \sqrt{(3\sqrt{5})^2 + 3^2} = 3\sqrt{6}.$$

Рассмотрим $\triangle P_3P_1P_2$. По теореме косинусов:

$$\cos \angle P_3P_1P_2 = \frac{P_3P_1^2 + P_1P_2^2 - P_3P_2^2}{2 \cdot P_3P_1 \cdot P_1P_2} = \frac{(3\sqrt{2})^2 + (3\sqrt{2})^2 - (3\sqrt{6})^2}{2 \cdot (3\sqrt{2}) \cdot (3\sqrt{2})} = -\frac{1}{2}.$$

Отсюда $\angle P_3P_1P_2 = 120^\circ$. Угол между прямыми — это острый угол, поэтому искомый угол равен $180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$.

б) Проведем через прямую BC_1 плоскость, параллельную прямой AC . Так как $A_1C_1 \parallel AC$, то искомая плоскость — это A_1BC_1 . Расстоя-

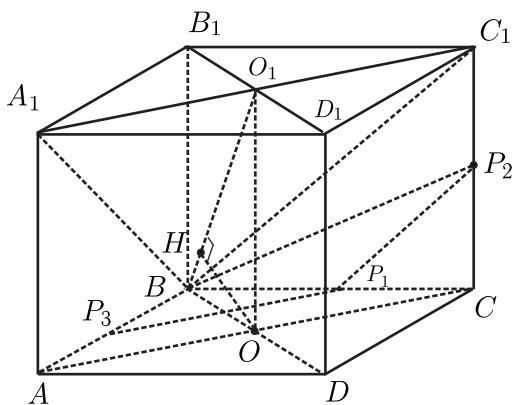


Рис. 49. К примеру 2.41.

ние между скрещивающимися прямыми AC и BC_1 равно расстоянию от любой точки прямой AC до плоскости A_1BC_1 . Найдем расстояние от точки O (центр основания $ABCD$) до плоскости A_1BC_1 . Построим плоскость BDD_1B_1 . Так как $AC \perp BD$ и $AC \perp BB_1$, то $AC \perp BDD_1B_1$. Поскольку $A_1C_1 \parallel AC$, то $A_1C_1 \perp BDD_1B_1$. Плоскость A_1BC_1 проходит через прямую A_1C_1 , перпендикулярную плоскости BDD_1B_1 , следовательно, плоскости A_1BC_1 и BDD_1B_1 взаимно перпендикулярны. Линией пересечения этих плоскостей является прямая BO_1 , где O_1 — центр грани $A_1B_1C_1D_1$. Искомое расстояние будет равно высоте OH , проведенной из точки O к прямой BO_1 в треугольнике BOO_1 .

Рассмотрим прямоугольный $\triangle BOO_1$: Катет BO — это половина диагонали основания: $BO = \frac{1}{2}BD = \frac{1}{2} \cdot 6\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$. Катет OO_1 равен ребру куба: $OO_1 = 6$. Гипотенуза BO_1 :

$$BO_1 = \sqrt{BO^2 + OO_1^2} = \sqrt{(3\sqrt{2})^2 + 6^2} = 3\sqrt{6}.$$

Площадь $\triangle BOO_1$ можно вычислить двумя способами:

$$S_{BOO_1} = \frac{1}{2} \cdot BO \cdot OO_1 = \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{2} \cdot 6 = 9\sqrt{2},$$

$$S_{BOO_1} = \frac{1}{2} \cdot OH \cdot BO_1 = \frac{1}{2} \cdot OH \cdot 3\sqrt{6}.$$

Приравняем площади:

$$9\sqrt{2} = \frac{1}{2} \cdot OH \cdot 3\sqrt{6} \implies OH = 2\sqrt{3}.$$

Ответ: б) $2\sqrt{3}$.

Задача 2.42. [75] ЕГЭ-2019, основная волна, резервный день, №14. В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ ребра равны 1. На продолжении отрезка $A_1 C_1$ за точку C_1 отмечена точка M так, что $A_1 C_1 = C_1 M$, а на продолжении отрезка $B_1 C$ за точку C отмечена точка N так, что $B_1 C = CN$.

а) Докажите, что $MN = MB_1$.

б) Найдите расстояние между прямыми $B_1 C_1$ и MN .

Ответ: б) $\frac{2}{\sqrt{5}}$.

2.9. Смешанные задачи.

Пример 2.43. [17] Через каждую вершину единичного куба проведены плоскости, перпендикулярные одной и той же диагонали куба. На какие части делится диагональ этими плоскостями?

Ответ: на три равные части длины $\frac{\sqrt{3}}{3}$ каждая.

Задача 2.44. ЕГЭ-2010, демонстрационный вариант, С2.

К диагонали куба провели перпендикуляры из остальных вершин куба. На сколько частей и в каком отношении основания этих перпендикуляров разделили диагональ?

Ответ: на три равные части.

Пример 2.45. МГУ, ф-т наук о материалах, 2003 (апрель), №4(6). Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ с ребром, равным $3a$. Точки K и L лежат на ребрах BB_1 и DD_1 соответственно, причем $BK : KB_1 = DL : LD_1 = 2 : 1$. Найдите диагонали многоугольника, который образуется в сечении данного куба плоскостью AKL .

РЕШЕНИЕ. Построим сечение куба: соединим точку A с точками K и L ; продолжим AL и $A_1 D_1$ до пересечения в точке P и AK и $A_1 B_1$ до пересечения в точке Q ; проведем прямую PQ которая пересекает $B_1 C_1$ в точке N , $D_1 C_1$ в точке M (рис. 50). Получаем сечение $AKNML$ — пятиугольник. Его диагоналями будут KL , AN , AM , KM и NL . Так как $AN = AM$, $KM = NL$, нужно найти только три величины.

Очевидно, что $KL = BL = 3a\sqrt{2}$. Найдём AN . Для этого опустим перпендикуляр $NN_1 = 3a$ из точки N на BC . $B_1 N = BN_1 = \frac{3}{2}a$;

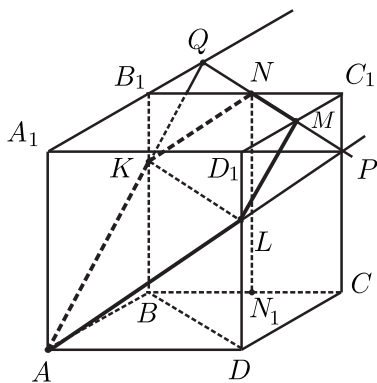


Рис. 50. К примеру 2.45.

$$AN_1^2 = (3a)^2 + \left(\frac{3}{2}a\right)^2, \text{ тогда}$$

$$AN = \sqrt{AN_1^2 + NN_1^2} = \sqrt{(3a)^2 + (3a)^2 + \left(\frac{3}{2}a\right)^2} = \frac{9}{2}a.$$

Найдем, наконец, KM — это диагональ в равнобедренной трапеции $KNML$ (рис. 51), где $KL = 3\sqrt{2}a$, $NM = \frac{1}{2}KL$.

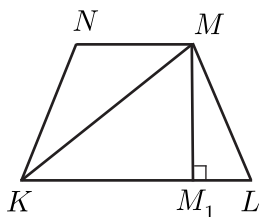


Рис. 51. К приме-
ру 2.45.

Из $\triangle B_1KN$ на грани AA_1B получаем:

$$KN^2 = KB_1^2 + B_1N^2 = a^2 + \frac{9}{4}a^2 = \frac{13}{4}a^2;$$

$$ML = KN.$$

Теперь нам известны все стороны трапеции. Опустим перпендикуляр MM_1 на KL . Тогда $M_1L = \frac{KL - NM}{2} = \frac{3\sqrt{2}a}{4}$, а $KM_1 = \frac{9\sqrt{2}a}{4}$.

По теореме Пифагора

$$\begin{aligned} MM_1^2 &= ML^2 - M_1L^2 \implies KM^2 = MM_1^2 + KM_1^2 = \\ &= ML^2 - M_1L^2 + KM_1^2 = \frac{49}{4}a^2. \end{aligned}$$

Ответ: $3\sqrt{2}a$, $\frac{7}{2}a$, $\frac{9}{2}a$.

Задача 2.46. МГУ, геологический ф-т, 2008 (июль), №8(8).

В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ ($AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1 \parallel DD_1$) точка R лежит на диагонали AC , а точка Q — на диагонали DC_1 , при этом RQ — общий перпендикуляр к прямым AC и DC_1 . Чему равна величина угла RDQ ?

Ответ: $\arccos \sqrt{\frac{2}{5}}$ или $\operatorname{arctg} \sqrt{\frac{3}{2}}$.

Пример 2.47. МГУ, биологический ф-т, 2002 (май), №5(5).

На ребрах A_1D_1 и B_1C_1 куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ соответственно взяты точки P и Q так, что $A_1P : PD_1 = 1 : 1$, $B_1Q : QC_1 = 3 : 1$. В каком отношении делит объем куба плоскость, проходящая через точки P , Q и центр грани CC_1DD_1 ?

Ответ: $7 : 65$.

Задача 2.48. МГУ, биологический ф-т, 2002 (май), №5(5).

На ребрах AD и BC куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ соответственно взяты точки P и Q так, что $AP : PD = 2 : 1$, $BQ : QC = 1 : 3$. В каком отношении делит объем куба плоскость, проходящая через точки P , Q и центр грани CC_1D_1D ?

Ответ: $\frac{133}{803}$.

2.10. Задачи повышенной сложности.

1. МГУ, ф-т наук о материалах, 2000 (май), №5(6).

Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ с основаниями $ABCD$ и $A_1 B_1 C_1 D_1$, боковыми ребрами AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 . Длина ребра куба равна 6. Через вершину A , середину M ребра $B_1 C_1$ и некоторую точку K на ребре DD_1 проведена плоскость. Линия пересечения этой плоскости с гранью $A_1 B_1 C_1 D_1$ делит грань $A_1 B_1 C_1 D_1$ на две части, площади которых относятся как 1 : 19. Найдите длину отрезка AK . Ответ: $2\sqrt{10}$.

2.11. Задачи для самостоятельного решения.

Обязательные задачи.

- [3] Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Верно ли, что плоскости BCA_1 и $B_1 C_1 D$ перпендикулярны? Дайте обоснование ответа.
- Постройте сечение куба, проходящее через точки P, Q, A , где $P \in A_1 B_1 C_1, Q \in DD_1 C_1$.

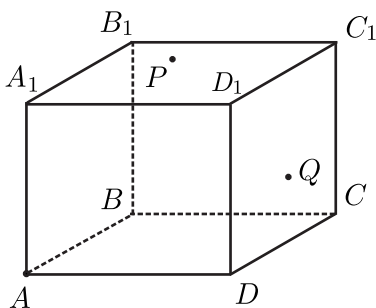


Рис. 52. К задаче 2

- [3] Длина ребра куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ равна a , точка M лежит на ребре DD_1 так, что $D_1 M = \frac{a}{4}$. Найдите периметр треугольника $AB_1 M$ и площадь сечения плоскостью, проходящей через точки B_1 и M и параллельной прямой $C_1 D$.
- [3] Куб с ребром, длина которого равна $4\sqrt{3}$, пересечен плоскостью, проходящей через середины трех его ребер, выходящих из одной вершины. Найдите площадь сечения.
- [103] Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$.
 - Докажите, что прямая $B_1 D$ перпендикулярна плоскости $A_1 B C_1$.
 - Найдите угол между плоскостями $AB_1 C_1$ и $A_1 B_1 C$.
- [75] Точка E — середина ребра CC_1 куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$.
 - Докажите, что угол между прямыми BE и AD равен углу

CBE .

б) Найдите угол между прямыми BE и AD .

7. [75] ЕГЭ-2012, вторая волна, №13.

На ребре CC_1 куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ отмечена точка E так, что $CE : EC_1 = 1 : 2$.

а) Пусть точка F делит ребро BB_1 в отношении $1 : 2$, считая от вершины B_1 . Докажите, что угол между прямыми BE и AC_1 равен углу $AC_1 F$.

б) Найдите угол между прямыми BE и AC_1 .

8. МГУ, химический ф-т, 2004 (июль), №5(6).

Дан куб $EFGHE_1 F_1 G_1 H_1$ с ребром, равным 2. На ребрах EH и HH_1 взяты точки A и B такие, что $\frac{EA}{AH} = 2$, $\frac{HB}{HB_1} = \frac{1}{2}$. Через точки A , B и G_1 проведена плоскость. Найдите расстояние от точки E до этой плоскости.

9. [18] Найдите расстояние между серединами двух скрещивающихся ребер куба, полная поверхность которого равна 36 см^2 .

10. [75] В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ все ребра равны 2. На ребре BB_1 отмечена точка K так, что $KB = 1,6$. Через точки K и C_1 проведена плоскость α , параллельная прямой BD_1 .

а) Докажите, что $A_1 P : PB_1 = 3 : 1$, где P — точка пересечения плоскости α с ребром $A_1 B_1$.

б) Найдите угол между плоскостями α и $BB_1 C_1 C$.

11. [75] В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ все ребра равны 1.

а) Докажите, что $BD_1 \perp AC$.

б) Найдите расстояние от точки C до прямой BD_1 .

12. Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ с единичным ребром. Найдите расстояние от точки D_1 до плоскости $AB_1 C$.

13. [18] Расстояние между непересекающимися диагоналями двух смежных боковых граней куба равно d . Определите полную поверхность куба.

Дополнительные задачи.

1. [89] На ребре $BC = 4$ куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ взята середина M , а на ребре $A_1 D_1$ — такая точка N , что $A_1 N = 1$. Найдите длину кратчайшего пути из точки M в точку N по поверхности куба.

2. [107] ЕГЭ-2022, тренировочный вариант, №14.

Точки M и P являются соответственно серединами ребер AA_1 и BB_1 куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Длина ребра куба равна 4. Плоскость α проходит через точку M параллельно прямой $C_1 P$ так, что из трех следующих утверждений два истинны, а одно ложно:

1) $\alpha \parallel DC_1$; 2) $\alpha \parallel A_1 C_1$;

- 3) площадь сечения куба плоскостью α больше 9.
а) Постройте сечение куба плоскостью α .
б) Найдите площадь этого сечения.
3. [107] Точки N , M и P являются соответственно серединами ребер AA_1 , AD и C_1D_1 куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Длина ребра куба равна 4. Плоскость α проходит через точку A_1 так, что из трех следующих утверждений два истинны, а одно ложно:
1) $\alpha \perp NP$; 2) $\alpha \perp B_1M$;
3) площадь сечения куба плоскостью α меньше 10.
а) Постройте сечение куба плоскостью α .
б) Найдите площадь этого сечения.

2.12. Ответы к задачам на построение сечений.

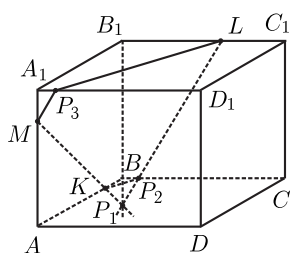


Рис. 53. К задаче 2.2.

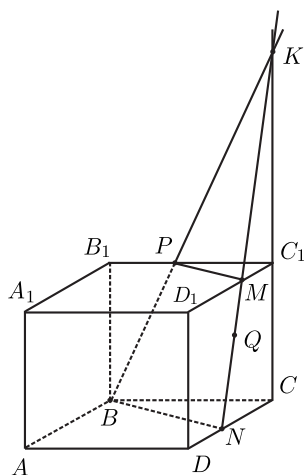


Рис. 54. К задаче 2.4.

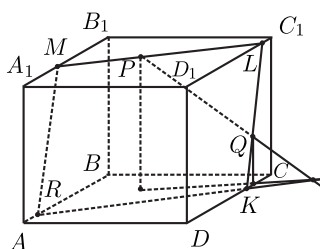


Рис. 55. К задаче 2.6.

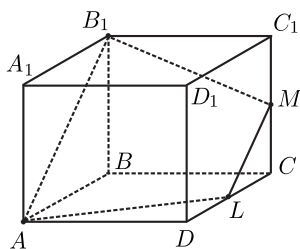


Рис. 56. К задаче 2.8.

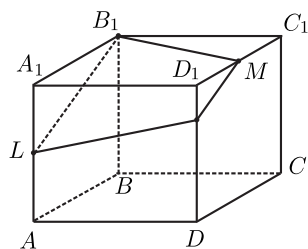


Рис. 57. К задаче 2.10.

§ 3. Параллелепипед

В этом разделе будем рассматривать как прямоугольный параллелепипед, который является естественным обобщением куба, так и наклонный параллелепипед.

3.1. Основные определения и утверждения.

1. Параллелепипед — это многогранник, у которого шесть граней и каждая из них параллелограмм.
2. Прямоугольный параллелепипед — это параллелепипед, у которого все грани прямоугольники.
3. Объем прямоугольного параллелепипеда $V = abc$, где a , b и c — длины ребер, выходящих из одной вершины.
4. Площадь полной поверхности прямоугольного параллелепипеда равна $S = 2(ab + ac + bc)$.
5. Диагональ прямоугольного параллелепипеда равна $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

3.2. Построение сечений. Площадь сечения.

Пример 3.1. Пусть $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — прямоугольный параллелепипед. На ребре $C_1 D_1$ задана точка K , на ребре CC_1 задана точка L , а на ребре AD — точка M , как показано на рис. 58. Постройте сечение параллелепипеда плоскостью, проходящей через точки K , L , M .

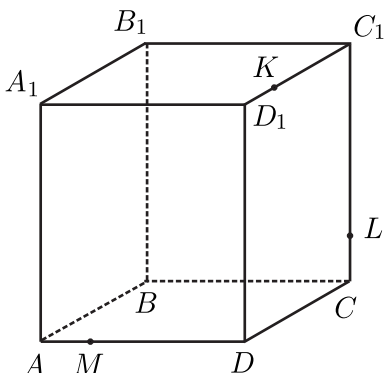


Рис. 58. К примеру 3.1.

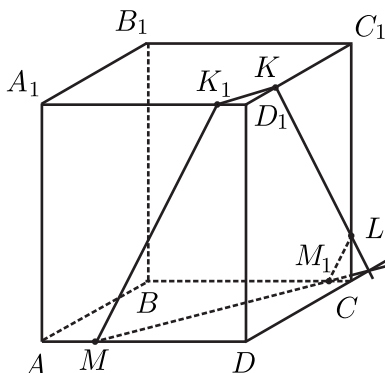


Рис. 59. К примеру 3.1.

РЕШЕНИЕ. Сечение строится аналогично примеру 2.1. для куба. Соединим точки K и L и продолжим отрезок KL до пересечения с прямой DC (рис. 59). Полученную точку пересечения соединим прямой с точкой M . Эта прямая пересекает ребро BC в точке M_1 . Поскольку плоскость сечения пересекает плоскости ABC и $A_1 B_1 C_1$ по параллельным прямым, поэтому проведем $KK_1 \parallel MM_1$. Соединяя точки M и K_1 ,

завершаем построение сечения KLM_1MK_1K .

Ответ: рис. 59.

Задача 3.2. Пусть $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — прямоугольный параллелепипед. На ребре $C_1 D_1$ задана точка K , на ребре CC_1 задана точка L , а на ребре AD — точка M , как показано на рис. 60. Постройте сечение параллелепипеда плоскостью, проходящей через точки K , L , M .

Ответ: сечение ML_1LK_1K на рис. 91.

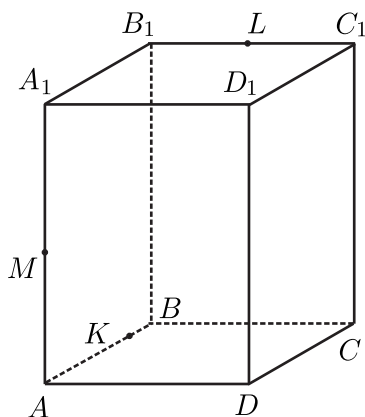


Рис. 60. К задаче 3.2.

Пример 3.3. Дан прямоугольный параллелепипед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$: $AB = AA_1 = a$, $AD = b$ точка M — середина ребра $C_1 D_1$. Постройте сечение параллелепипеда плоскостью $AB_1 M$ и найдите его площадь.

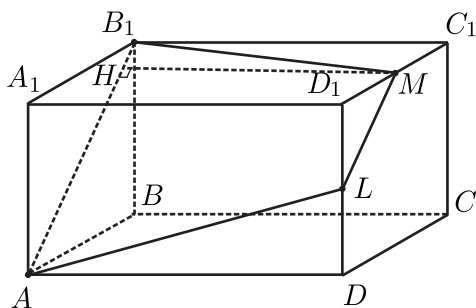


Рис. 61. К примеру 3.3.

РЕШЕНИЕ. Построим сечение AB_1ML параллелепипеда (рис. 61): соединим отрезками прямых точки A , B_1 и M . Плоскость сечения пересечет грань $DD_1 C_1$ по прямой, параллельной AB_1 (так как грани параллельны). Соединяя точки L и A , завершаем построение

сечения. Оно представляет собой равнобедренную трапецию: $AB_1 \parallel LM$ и $AL = B_1M$, так как треугольники $\triangle ADL$ и $\triangle B_1C_1M$ равны по двум катетам. Ее боковую сторону можно найти из $\triangle B_1MC_1$: $B_1M = \sqrt{B_1C_1^2 + MC_1^2} = \sqrt{b^2 + \frac{a^2}{4}}$. Опустим высоту MH на основание трапеции AB_1 . Так как трапеция равнобедренная, то

$$B_1H = \frac{1}{2}(AB_1 - ML) = \frac{1}{2} \left(a\sqrt{2} - \frac{a\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{a\sqrt{2}}{4}.$$

Тогда высота трапеции

$$MH = \sqrt{B_1M^2 - B_1H^2} = \sqrt{b^2 + \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{8}} = \sqrt{b^2 + \frac{a^2}{8}},$$

а площадь трапеции равна

$$S = \frac{AB_1 + ML}{2} \cdot MH = \frac{3a\sqrt{2}}{4} \sqrt{b^2 + \frac{a^2}{8}} = \frac{3a}{8} \sqrt{8b^2 + a^2}.$$

Ответ: $\frac{3a}{8} \sqrt{8b^2 + a^2}$.

Задача 3.4. Дан прямоугольный параллелепипед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$: $AB = AA_1 = a$, $AD = b$ точка M — середина ребра CC_1 . Найдите площадь сечения параллелепипеда плоскостью AB_1M .

Ответ: $\frac{3a}{8} \sqrt{8b^2 + a^2}$.

Пример 3.5. [75] ЕГЭ-2015, досрочная волна, резервный день, №14. Основанием прямой четырехугольной призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ является квадрат $ABCD$ со стороной $3\sqrt{2}$, высота призмы равна $2\sqrt{7}$. Точка K — середина ребра BB_1 . Через точки K и C_1 проведена плоскость α , параллельная прямой BD_1 .

а) Докажите, что сечение призмы плоскостью α является равнобедренным треугольником.

б) Найдите периметр треугольника, являющегося сечением призмы плоскостью α .

РЕШЕНИЕ. а) Отметим, что прямая четырехугольная призма есть параллелепипед. Рассмотрим плоскость A_1C_1K . Докажем, что она параллельна BD_1 . Пусть O_1 — точка пересечения диагоналей верхнего основания A_1C_1 и B_1D_1 (рис. 62). В $\triangle BB_1D_1$ отрезок KO_1 является средней линией, так как K — середина BB_1 и O_1 — середина B_1D_1 . Следовательно, $KO_1 \parallel BD_1$. Поскольку прямая KO_1 лежит в плоскости A_1C_1K , то по признаку параллельности прямой и плоскости плоскость A_1C_1K параллельна прямой BD_1 . Таким образом, плоскость A_1C_1K и есть искомая плоскость α , а сечение — треугольник $\triangle A_1C_1K$.

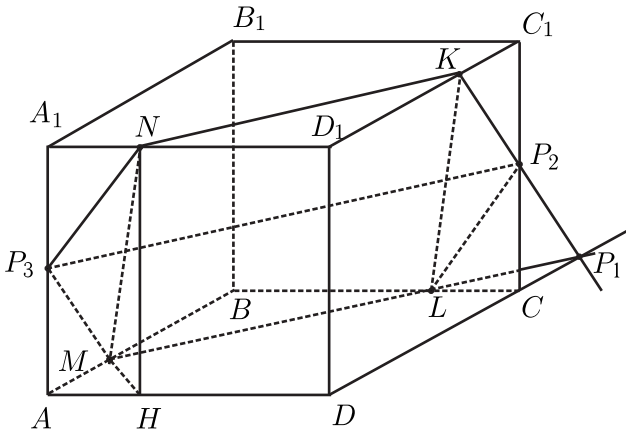


Рис. 63. К примеру 3.7.

Пусть H — проекция точки N на плоскость основания ABC . Точка H лежит на ребре AD , причем $AH = A_1N = 1$. Найдем MN . Для этого сначала найдем MH из прямоугольного $\triangle AMH$:

$$MH = \sqrt{AM^2 + AH^2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}.$$

В прямоугольном $\triangle MNH$, где катет $NH = AA_1 = \sqrt{6}$:

$$MN = \sqrt{MH^2 + NH^2} = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + (\sqrt{6})^2} = 2\sqrt{2}.$$

Так как $MN = NK$, параллелограмм $MNKL$ является ромбом.

Докажем, что угол $\angle NML$ — прямой. Воспользуемся теоремой о трех перпендикулярах. NH — перпендикуляр к плоскости ABC , MN — наклонная, MH — ее проекция на плоскость ABC . $MH \parallel BD$, следовательно, $MH \perp AC$, поэтому $MH \perp ML$. Отсюда получаем, что $MNKL$ — квадрат.

б) $\triangle MBL$ — прямоугольный и равнобедренный, следовательно, $\angle BLM = 45^\circ$, поэтому $\angle P_1LC_1 = 45^\circ$. Отсюда $\triangle LC_1P_1$ — прямоугольный равнобедренный, следовательно, $CP_1 = LC = 1$. $\triangle CP_2P_1 = \triangle C_1P_2K$ по катету и острому углу ($C_1K = P_1C = 1$, $\angle KP_2C_1 = \angle P_1P_2C$ как вертикальные), поэтому $C_1P_2 = CP_2 = \frac{\sqrt{6}}{2}$, то есть P_2 — середина CC_1 . Аналогично P_3 — середина AA_1 . Отсюда следует, что сечение прямоугольного параллелепипеда состоит из двух одинаковых равнобедренных трапеций: P_3NKP_2 и P_3MLP_2 (рис. 64). Найдем площадь трапеции P_3NKP_2 .

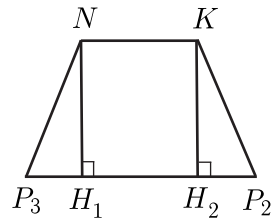


Рис. 64. К примеру 3.7.

Основания трапеции: $NK = 2\sqrt{2}$ (из пункта а). Второе основание P_3P_2 параллельно диагонали AC , так как P_3 и P_2 — середины боковых ребер.

$$P_3P_2 = AC = \sqrt{3^2 + 3^2} = 3\sqrt{2}.$$

Боковая сторона P_3N . В прямоугольном $\triangle P_3A_1N$:

$$P_3N = \sqrt{(A_1P_3)^2 + (A_1N)^2} = \frac{\sqrt{10}}{2}.$$

Проведем высоты NH_1 и KH_2 к основанию P_3P_2 .

$$P_3H_1 = \frac{P_3P_2 - NK}{2} = \frac{3\sqrt{2} - 2\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

В прямоугольном $\triangle P_3NH_1$:

$$NH_1 = \sqrt{P_3N^2 - P_3H_1^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{10}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{2}$$

Площадь трапеции P_3NKP_2 :

$$S_1 = \frac{P_3P_2 + NK}{2} \cdot h = \frac{3\sqrt{2} + 2\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{2} = \frac{5\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{2} = 5.$$

Полная площадь сечения равна удвоенной площади этой трапеции:

$$S = 2 \cdot S_1 = 2 \cdot 5 = 10.$$

Ответ: б) 10.

Задача 3.8. [75] ЕГЭ-2016, досрочная волна, №14.

В правильной четырехугольной призме $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ сторона основания $AB = 6$, а боковое ребро $AA_1 = 4\sqrt{3}$. На ребрах AB , $A_1 D_1$ и $C_1 D_1$ отмечены точки M , N и K соответственно, причем $AM = A_1 N = C_1 K = 1$.

а) Пусть L — точка пересечения плоскости MNK с ребром BC . Докажите, что $MNKL$ — квадрат.

б) Найдите площадь сечения призмы плоскостью MNK .

Ответ: б) 55.

Пример 3.9. [75] ЕГЭ-2016, пробный вариант, С.Петербург, №14.

В правильной четырехугольной призме $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ точка K делит боковое ребро AA_1 в отношении $AK : KA_1 = 1 : 2$. Через точки B и K проведена плоскость α , параллельная прямой AC и пересекающая ребро DD_1 в точке M .

а) Докажите, что плоскость α делит ребро DD_1 в отношении $DM : MD_1 = 2 : 1$.

б) Найдите площадь сечения, если известно, что $AB = 4$, $AA_1 = 6$.

РЕШЕНИЕ. а) Пусть ребро $AA_1 = 3x$, тогда $AK = x$, $KA_1 = 2x$. Построим сечение плоскостью α . Соединим точки B и K , поскольку они принадлежат одной грани AA_1B_1B (рис. 65). Рассмотрим диагональное сечение AA_1C_1C . Линия пересечения плоскости α с плоскостью AA_1C_1C будет прямой $KP \parallel AC$. Пусть O и O_1 — центры нижнего и верхнего оснований соответственно. Прямая OO_1 лежит в плоскости BB_1D_1D . Пусть O_2 — точка пересечения плоскости α с прямой OO_1 . Проведем через O_2 прямую BO_2 , получим точку M . Соединим K и M , P и M , что завершает построение сечения.

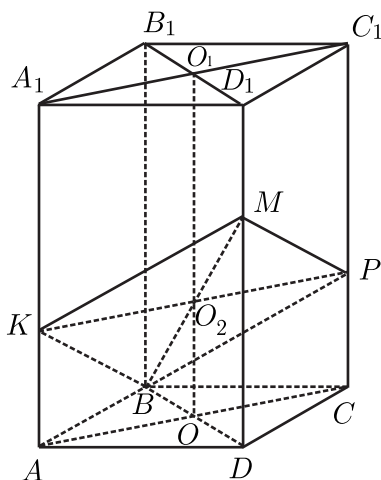


Рис. 65. К примеру 3.9.

В $\triangle BMD$ отрезок OO_2 — средняя линия. Так как $OO_2 = x$, то $MD = 2OO_2 = 2x$, следовательно, $MD_1 = x$, то есть M делит ребро DD_1 в отношении $2 : 1$, считая от точки D .

б) Так как $AA_1 = 6$, то $x = 2$.

Сечением является параллелограмм $BKMP$. Для вычисления его площади найдем площадь $\triangle KBP$ и удвоим. В прямоугольном $\triangle KBP$ $KB = \sqrt{AB^2 + AK^2} = \sqrt{4^2 + 2^2} = 2\sqrt{5}$. $\triangle KBP$ — равнобедренный с основанием $KP = 4\sqrt{3}$ и боковыми сторонами $KB = KP = 2\sqrt{5}$. Тогда параллелограмм $BKMP$ является ромбом, и его диагонали взаимно перпендикулярны. Из прямоугольного $\triangle KBO_2$:

$$BO_2 = \sqrt{BK^2 - KO_2^2} = \sqrt{(2\sqrt{5})^2 - (2\sqrt{2})^2} = 2\sqrt{3};$$

$$S_{KBP} = \frac{1}{2} BO_2 \cdot KP = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{3} \cdot 4\sqrt{2} = 4\sqrt{6}.$$

Площадь всего сечения $S = 2 \cdot$

$$S_{\triangle KBP} = 2 \cdot 4\sqrt{6} = 8\sqrt{6}.$$

Ответ: б) $8\sqrt{6}$.

Задача 3.10. [75] В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ известны ребра $AB = 8$, $AD = 7$, $AA_1 = 5$. Точка W принадлежит ребру DD_1 и делит его в отношении $DW : WD_1 = 1 : 4$, считая от вершины D .

а) Докажите, что сечение этого параллелепипеда плоскостью, проходящей через точки C , W и A_1 — параллелограмм.

б) Найдите площадь этого сечения.

Ответ: б) $\sqrt{4209}$.

Пример 3.11. [75] В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ известны длины ребер: $AB = 4$, $BC = 3$, $AA_1 = 2$. Точки P и Q — середины ребер $A_1 B_1$ и CC_1 соответственно. Плоскость APQ пересекает ребро $B_1 C_1$ в точке K .

а) Докажите, что $B_1 K : KC_1 = 2 : 1$.

б) Найдите площадь сечения параллелепипеда плоскостью APQ .

РЕШЕНИЕ. а) Напомним, что правильная четырехугольная призма представляет собой прямоугольный параллелепипед, в основании которого лежит квадрат. Построим сечение параллелепипеда плоскостью APQ . Соединим точки A и P , так как они принадлежат одной грани $AA_1 B_1 B$ (рис. 66). Грани $AA_1 B_1 B$ и $DD_1 C_1 C$ параллельны, поэтому

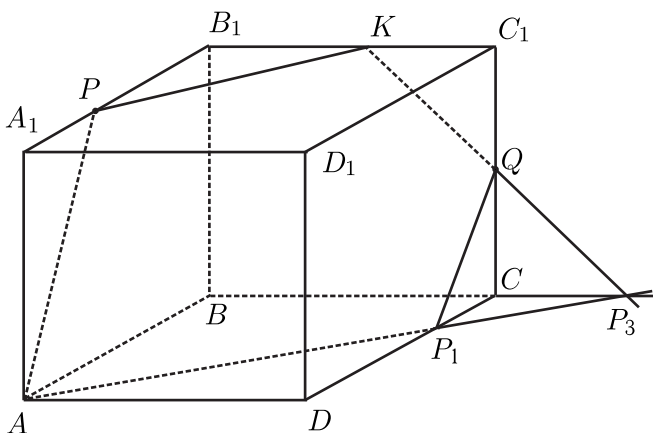


Рис. 66. К примеру 3.11.

плоскость сечения пересекает их по параллельным прямым. Проведем $QP_1 \parallel AP$. Продлим прямую AP_1 , лежащую в плоскости нижней грани $ABCD$, и прямую BC , также лежащую в плоскости нижнего основания, до их пересечения в точке P_3 . Продлим $P_3 Q$ до пересечения с ребром $B_1 C_1$ в точке K . Треугольники $\triangle P_1 C P_3$ и $\triangle A B P_3$ подобны по двум углам, отсюда $\frac{CP_3}{BP_3} = \frac{CP_1}{BA} = \frac{1}{4}$. Отсюда

$$\frac{CP_3}{BC + CP_3} = \frac{1}{4} \Rightarrow 4CP_3 = 3 + CP_3 \Rightarrow 3CP_3 = 3 \Rightarrow CP_3 = 1.$$

Рассмотрим $\triangle C Q P_3$ и $\triangle C_1 Q K$. Они равны по катету и острому углу. Из равенства треугольников следует, что $C_1 K = CP_3 = 1$. Длина ребра $B_1 C_1 = BC = 3$. Тогда $B_1 K = B_1 C_1 - KC_1 = 3 - 1 = 2$. Следовательно, отношение $\frac{B_1 K}{KC_1} = \frac{2}{1} = 2 : 1$.

б) Сечением параллелепипеда плоскостью APQ является пятиугольник $APK Q P_1$. Площадь этого сечения можно найти, вычитая из площади вспомогательной трапеции $APK P_3$ площадь $\triangle Q P_1 P_3$.

Найдем длины сторон трапеции $APKP_3$: $\triangle CQP_3$, $QP_3 = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$. Следовательно, $KQ = \sqrt{2}$, поэтому $KP_3 = 2\sqrt{2}$.

Точка P — середина A_1B_1 , следовательно, $A_1P = \frac{1}{2}AB = 2$.

В $\triangle AA_1P$: $AP = \sqrt{AA_1^2 + A_1P^2} = 2\sqrt{2}$; $B_1P = 2$; $B_1K = 2$.

В $\triangle PB_1K$: $PK = \sqrt{PB_1^2 + B_1K^2} = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$.

В $\triangle ABP_3$:

$$BP_3 = BC + CP_3 = 3 + 1 = 4,$$

$$AP_3 = \sqrt{AB^2 + BP_3^2} = \sqrt{4^2 + 4^2} = 4\sqrt{2}.$$

Четырехугольник $APKP_3$ является равнобокой трапецией, так как $AP = KP_3$. Найдем ее площадь. Проведем высоты PH_1 и KH_2 (рис. 67). $AH_1 = \frac{1}{2}(AP_3 - PK) = \frac{1}{2}(4\sqrt{2} - 2\sqrt{2}) = \sqrt{2}$. Высота трапеции:

$$PH_1 = \sqrt{AP^2 - AH_1^2} = \sqrt{(2\sqrt{2})^2 - 2} = \sqrt{6}.$$

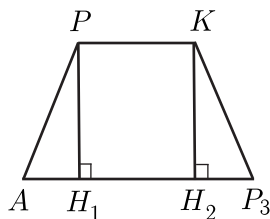


Рис. 67. К примеру 3.11.

Тогда площадь трапеции равна

$$S_{APKP_3} = \frac{PK + AP_3}{2} PH_1 = \frac{2\sqrt{2} + 4\sqrt{2}}{2} \sqrt{6} = 6\sqrt{3}.$$

Чтобы получить искомую площадь сечения, из площади этой трапеции нужно вычесть площадь $\triangle P_1QP_3$. Так как $\triangle P_1QP_3$ равносторонний со стороной $\sqrt{2}$, его площадь $S_{\triangle} = \frac{(\sqrt{2})^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Искомая площадь сечения:

$$S_{\text{сеч}} = S_{APKP_3} - S_{\triangle} = 6\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{11\sqrt{3}}{2}.$$

Ответ: б) $\frac{11\sqrt{3}}{2}$.

Задача 3.12. [75] На ребре BB_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ взята точка F так, что $B_1 F : FB = 1 : 6$. Точка T — середина ребра $B_1 C_1$. Известно, что $AB = 6\sqrt{2}$, $AD = 12$, $AA_1 = 14$.

а) Докажите, что плоскость FTD_1 делит ребро AA_1 в отношении 2 : 5.

б) Найдите площадь сечения параллелепипеда плоскостью FTD_1 .

Ответ: б) $18\sqrt{21}$.

3.3. Угол между плоскостями.

Пример 3.13. Дан прямоугольный параллелепипед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, в основании которого лежит квадрат $ABCD$ со стороной 4, ребро $AA_1 = 6$. Найдите угол между плоскостями $AB_1 D_1$ и $A_1 B_1 C_1$.

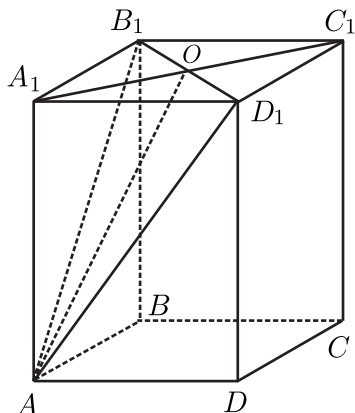


Рис. 68. К примеру 3.13.

РЕШЕНИЕ. Угол между плоскостями по величине равен линейному углу: острому углу, образованному перпендикулярами к линии пересечения плоскостей, восстановленными из одной точки. $B_1 D_1$ — линия пересечения рассматриваемых плоскостей. $A_1 O \perp B_1 D_1$, так как диагонали квадрата взаимно перпендикулярны. Следовательно, $AO \perp B_1 D_1$ по теореме о трех перпендикулярах. Таким образом, $\angle A_1 O A$ — искомый. Из $\triangle AA_1 O$

$$\operatorname{tg} \angle A_1 O A = \frac{AA_1}{A_1 O} = \frac{6}{2\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

Ответ: $\operatorname{arctg} \frac{3\sqrt{2}}{2}$.

Задача 3.14. [75] В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ известны ребра $AB = 35$, $AD = 12$, $CC_1 = 21$.

а) Докажите, что высоты треугольников ABD и $A_1 B D$, приведенные к стороне BD , имеют общее основание.

б) Найдите угол между плоскостями ABC и $A_1 B D$.

Ответ: б) $\operatorname{arctg} \frac{37}{20}$.

Пример 3.15. [111] В правильной четырехугольной призме $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ сторона основания AB равна $2\sqrt{3}$, а боковое ребро AA_1 равно 3. На ребрах $A_1 D_1$ и DD_1 отмечены соответственно точки K и M так, что $A_1 K = KD_1$, а $DM : MD_1 = 2 : 1$.

а) Докажите, что прямые MK и BK перпендикулярны.

б) Найдите угол между плоскостями BMK и BCC_1 .

РЕШЕНИЕ. а) Найдем стороны $\triangle BKM$. Для этого сначала рассмотрим прямоугольный треугольник $\triangle A_1 B_1 K$. По теореме Пифагора $B_1 K = \sqrt{15}$. Далее, из прямоугольного треугольника $\triangle BB_1 K$ получаем $BK = 2\sqrt{6}$. Аналогично из прямоугольных треугольников $\triangle BMD$ и $\triangle KD_1 M$ $BM = 2\sqrt{7}$, $KM = 2$. По теореме, обратной теореме Пифагора, заключаем, что $BK \perp MK$ в $\triangle BKM$.

б) Поскольку плоскость $AA_1 D_1$ параллельна плоскости $BB_1 C_1$, то плоскость BKM образует с плоскостью $AA_1 D_1$ такой же угол, что и с плоскостью $BB_1 C_1$. Так как $AB \perp AA_1 D_1$, то $AB \perp KM$. Кроме того, $BK \perp KM$ по доказанному в п. а), поэтому плоскость $AKB \perp KM$. Отсюда вытекает, что $AK \perp KM$, следовательно, $\angle AKB$ — линейный угол искомого двугранного угла. Найдем $\angle AKB$ из $\triangle AKB$ по теореме

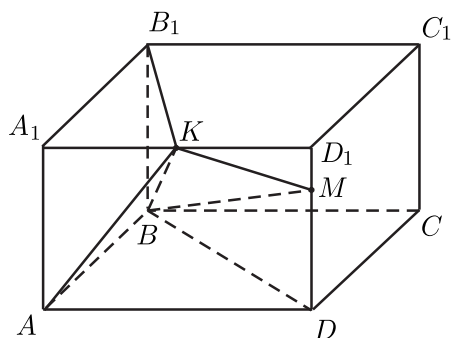


Рис. 69. К примеру 3.15.

косинусов:

$$\cos \angle AKB = \frac{AK^2 + BK^2 - AB^2}{2AK \cdot KB} = \frac{12 + 24 - 12}{2 \cdot 2\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Значит, $\angle AKB = 45^\circ$.

Ответ: б) 45° .

Задача 3.16. [111] В правильной четырехугольной призме $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ сторона основания AB равна 3, а боковое ребро AA_1 равно $\sqrt{3}$. На ребрах $C_1 D_1$ и DD_1 отмечены соответственно точки K и M так, что $D_1 K = KC_1$, а $DM : MD_1 = 1 : 3$.

а) Докажите, что прямые MK и BK перпендикулярны.

б) Найдите угол между плоскостями BMK и ABB_1 .

Ответ: б) $\arctg \frac{2\sqrt{21}}{7}$.

Пример 3.17. [75] На ребре AA_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ взята точка E так, что $A_1 E : EA = 2 : 3$, на ребре BB_1 — точка F так, что $B_1 F : FB = 1 : 4$, а точка T — середина ребра $B_1 C_1$. Известно, что $AB = 6$, $AD = 4$, $AA_1 = 10$.

а) Докажите, что плоскость EFT проходит через вершину D_1 .

б) Найдите угол между плоскостью EFT и плоскостью $AA_1 B_1$.

РЕШЕНИЕ. а) Построим сечение прямоугольного параллелепипеда плоскостью EFT . Соединим точки E и F , лежащие в плоскости грани $AA_1 B_1 B$, и точки F и T — в плоскости грани $BB_1 C_1 C$ (рис. 70). Поскольку боковые грани $AA_1 D_1 D$ и $BB_1 C_1 C$ параллельны, то плоскость EFT пересекает их по параллельным прямым. Проведем через точку E прямую EP_1 , параллельную FT , где P_1 — точка на ребре $A_1 D_1$. Рассмотрим прямоугольные треугольники $\triangle A_1 P_1 E$ и $\triangle B_1 T F$. Так как их стороны попарно параллельны: $A_1 P_1 \parallel B_1 T$, $A_1 E \parallel B_1 F$, $EP_1 \parallel FT$, то эти треугольники подобны. Из подобия следует:

$$\frac{A_1 P_1}{B_1 T} = \frac{A_1 E}{B_1 F}. \quad (3.1)$$

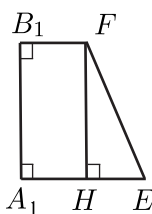


Рис. 72. К
примеру 3.17.

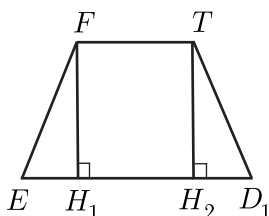


Рис. 73. К примеру 3.17.

Из $\triangle D_1C_1T$: $D_1T = \sqrt{D_1C_1^2 + C_1T^2} = 2\sqrt{10}$.

Тогда $EF = \sqrt{AB^2 + (FB - EA)^2} = 2\sqrt{10}$.

Так как $D_1T = EF$, трапеция является равнобедренной. Найдём её высоту h .

$$h = \sqrt{EF^2 - \left(\frac{ED_1 - FT}{2}\right)^2} = \sqrt{(2\sqrt{10})^2 - \left(\frac{4\sqrt{2} - 2\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{38}.$$

$$S_{EFTD_1} = \frac{FT + ED_1}{2} \cdot h = \frac{2\sqrt{2} + 4\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{38} = 6\sqrt{19}.$$

Найдём угол:

$$\cos \varphi = \frac{S_{A_1B_1FE}}{S_{EFTD_1}} = \frac{18}{6\sqrt{19}} = \frac{3}{\sqrt{19}} \Rightarrow \varphi = \arccos \frac{3}{\sqrt{19}}.$$

Ответ: б) $\arccos \frac{3}{\sqrt{19}} = \arctg \frac{\sqrt{10}}{3}$.

Задача 3.18. [75] На ребре AA_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ взята точка E так, что $A_1E : EA = 1 : 2$, на ребре BB_1 — точка F так, что $B_1F : FB = 1 : 5$, а точка T — середина ребра B_1C_1 . Известно, что $AB = 4$, $AD = 2$, $AA_1 = 6$.

а) Докажите, что плоскость EFT проходит через вершину D_1 .

б) Найдите угол между плоскостью EFT и плоскостью BB_1C_1 .

Ответ: б) $\arccos \frac{1}{\sqrt{33}}$.

Задача 3.19. [103] ЕГЭ-2020, тренировочный вариант, №14.

В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ известны длины ребер $AA_1 = 15$, $AB = 12$, $AD = 8$. Точка K — середина ребра C_1D_1 , а точка L делит ребро BB_1 в отношении $4 : 1$, считая от вершины B_1 .

а) Найдите отношение, в котором плоскость LKA_1 делит ребро CC_1 , считая от вершины C_1 .

б) Найдите косинус угла между плоскостями LKA_1 и $A_1B_1C_1$.

Ответ: а) $2 : 3$; б) $\frac{4}{\sqrt{41}}$.

Пример 3.20. [75] В основании прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ лежит квадрат $ABCD$ со стороной 2, а высота призмы равна 1. Точка E лежит на диагонали BD_1 , причем $BE = 1$.
 а) Постройте сечение параллелепипеда плоскостью $A_1 C_1 E$.
 б) Найдите угол между плоскостью сечения и плоскостью ABC .

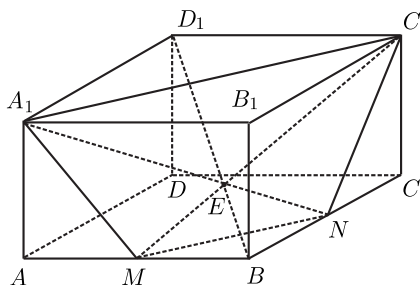


Рис. 74. К примеру 3.20.

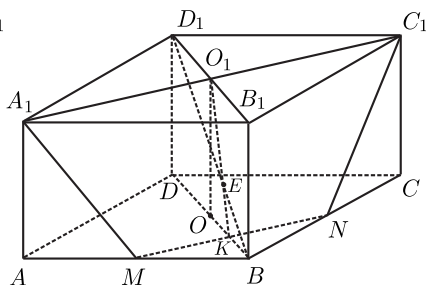


Рис. 75. К примеру 3.20.

РЕШЕНИЕ. а) Построим сечение параллелепипеда плоскостью $A_1 C_1 E$ (рис. 74). Для этого рассмотрим плоскость $AD_1 C_1 B$, содержащую параллельные прямые AB и $D_1 C_1$. Диагональ параллелепипеда BD_1 и, следовательно, точка E лежат в этой плоскости. Продлим $C_1 E$ до пересечения с ребром AB (оно также лежит в плоскости $AD_1 C_1 B$) и получим точку M (рис. 74). Аналогично, продлевая $A_1 E$ до пересечения с ребром BC , получим точку N . Отметим, что $MN \parallel A_1 C_1$, поскольку сечение пересекает параллельные плоскости $A_1 B_1 C_1$ и ABC по параллельным прямым. Таким образом, равнобокая трапеция $A_1 C_1 N M$ — искомое сечение.

б) По определению под углом между плоскостями понимается градусная мера линейного угла, то есть угла между двумя перпендикулярами к линии пересечения плоскостей, восстановленными из одной точки. Пусть K — точка пересечения MN с диагональю BD (рис. 75). Так как $MN \parallel AC$, то $DB \perp MN$, так как диагонали квадрата взаимно перпендикулярны. По теореме о трех перпендикулярах $O_1 K \perp MN$, поэтому $\angle O_1 K O$ — линейный угол искомого двугранного угла. Найдем диагональ:

$$BD_1^2 = 2^2 + 2^2 + 1^2 = 9 \implies BD_1 = 3.$$

Отсюда $D_1 E = BD_1 - BE = 3 - 1 = 2$. Треугольники $D_1 O_1 E$ и $B K E$ подобны по двум углам, следовательно

$$\frac{D_1 O_1}{B K} = \frac{D_1 E}{B E} \implies \frac{\sqrt{2}}{B K} = \frac{2}{1} \implies B K = \frac{\sqrt{2}}{2} \implies O K = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Из $\triangle OO_1K$ получаем, что $\operatorname{tg} \angle OKO_1 = \frac{OO_1}{OK} = \sqrt{2}$.

Ответ: б) $\arctg \sqrt{2}$.

Задача 3.21. Постройте сечение прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, проходящее через точку B_1 и середину AD параллельно диагонали основания AC , и найдите угол между плоскостью сечения и плоскостью основания ABC , если $AB = AD = 2\sqrt{2}$, $BB_1 = 3$. Ответ дайте в градусах.

Ответ: сечение на рис. 92; 45° .

Задача 3.22. МГУ, олимпиада Абитуриент-2008, №6(7).

В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, где AA_1 , BB_1 , CC_1 и DD_1 — параллельные ребра, через точки B_1 , D_1 , A проведена плоскость α , а через точки A_1 , C_1 и D — плоскость δ . Найдите угол между плоскостями α и δ .

Ответ: $\arccos \frac{1}{3}$.

3.4. Угол между прямой и плоскостью.

Пример 3.23. [75] В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ известны $AB = 2$, $AD = AA_1 = 1$.

а) Пусть B_1E — высота треугольника BB_1C_1 . Докажите, что AE — проекция AB_1 на плоскость ABC_1 .

б) Найдите угол между прямой AB_1 и плоскостью ABC_1 .

РЕШЕНИЕ. а) Напомним, что угол между прямой и плоскостью — это угол между прямой и ее проекцией на эту плоскость. Грань BB_1C_1C квадрат по условию, поэтому точка лежит на пересечении диагоналей. $AB \perp B_1E$, так как боковое ребро прямоугольного параллелепипеда перпендикулярно плоскости основания и, следовательно, перпендикулярно любой прямой, лежащей в плоскости основания. Отсюда по признаку перпендикулярности прямой и плоскости $B_1E \perp ABC_1$, поэтому AE — проекция AB_1 на плоскость ABC_1 .

б) Согласно а), AE — проекция AB_1 на плоскость ABC_1 , поэтому $\angle B_1AE$ — искомый. Из $\triangle AB_1E$

$$\sin \angle B_1AE = \frac{B_1E}{AB_1} = \frac{1/\sqrt{2}}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{10}}.$$

Ответ: б) $\arcsin \frac{1}{\sqrt{10}}$.

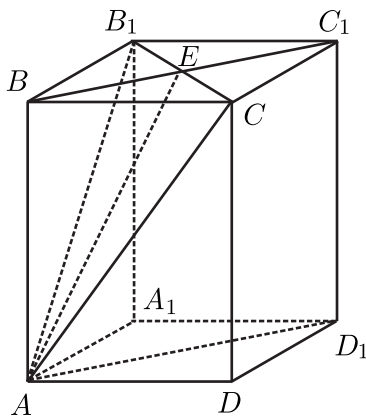


Рис. 76. К примеру 3.23.

Задача 3.24. В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ точки M и N — середины ребер BB_1 и CC_1 соответственно. Найдите угол между прямой D_1N и плоскостью AMN , если CC_1 в

два раза больше, чем CD .

Ответ: 90° .

Пример 3.25. [17] Диагонали боковых граней прямоугольного параллелепипеда составляют с плоскостью основания углы α и β . Найдите угол между диагональю параллелепипеда и плоскостью основания.

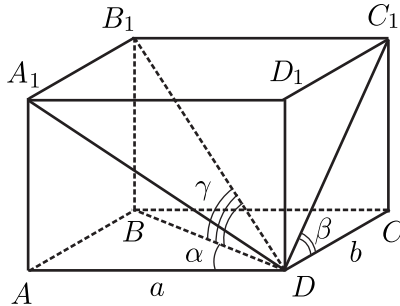


Рис. 77. К примеру 3.25.

РЕШЕНИЕ. Пусть $AD = a$, $AB = b$, $AA_1 = c$ (см. рис. 77). Из $\triangle AA_1D$ имеем $a = c \operatorname{ctg} \alpha$, аналогично из $\triangle CC_1D$ $b = c \operatorname{ctg} \beta$. По теореме Пифагора в $\triangle ABD$ $BD = \sqrt{a^2 + b^2} = c \sqrt{\operatorname{ctg}^2 \alpha + \operatorname{ctg}^2 \beta}$. В $\triangle BB_1D$ $\operatorname{ctg} \gamma = \frac{BD}{c} = \sqrt{\operatorname{ctg}^2 \alpha + \operatorname{ctg}^2 \beta}$.

Ответ: $\operatorname{arccctg} \sqrt{\operatorname{ctg}^2 \alpha + \operatorname{ctg}^2 \beta}$.

Задача 3.26. [17] Плоскость пересекает прямоугольный параллелепипед с квадратным основанием по ромбу с острым углом α . Под каким углом пересекает эта плоскость боковые ребра параллелепипеда?

Ответ: $\arcsin \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$.

3.5. Расстояние от точки до плоскости.

Пример 3.27. [75] В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ ребра $BC = 8$, $CD = 3$, $BB_1 = 6$. Точка Q — середина ребра CC_1 . Найдите расстояние от точки A до плоскости BD_1Q .

РЕШЕНИЕ. Построим сечение параллелепипеда плоскостью BD_1Q : соединим точки Q и D_1 ; проведем $BP \parallel D_1Q$ (плоскость сечения пересекает параллельные грани). Точка Q — середина ребра CC_1 , поэтому точка P — середина ребра AA_1 , $QP \parallel AC$. Прямая AC параллельна плоскости PQB , значит, расстояние от точки A до плоскости PQB равно расстоянию от любой точки этой прямой до плоскости. Опустим перпендикуляр BN на AC . Восстановим перпендикуляр из точки N к плоскости основания, который пересечет плоскость сечения в точке M . Плоскость MNB перпендикулярна плоскости сечения, поэтому высота

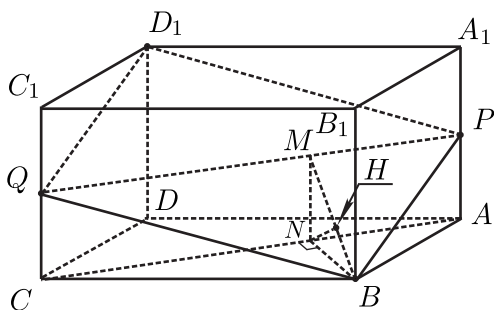


Рис. 78. К примеру 3.27.

NH в $\triangle NMB$ будет искомым расстоянием.

Рассмотрим прямоугольный $\triangle ABC$, NB — его высота,

$$NB = \frac{BC \cdot AB}{AC} = \frac{8 \cdot 3}{\sqrt{64 + 9}} = \frac{24}{\sqrt{73}}.$$

Далее аналогично из прямоугольного $\triangle MNB$

$$NH = \frac{MN \cdot NB}{MB} = \frac{3 \cdot \frac{24}{\sqrt{73}}}{\sqrt{9 + \frac{24^2}{73}}} = \frac{24}{\sqrt{137}}.$$

Ответ: $\frac{24}{\sqrt{137}}$.

Задача 3.28. [75] В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ ребра $DD_1 = 24$, $AD = 8$ и $AB = 7,5$. На ребрах AA_1 и CD отмечены точки P и K соответственно, причем $DK = 5$, $A_1 P = 6$. Плоскость BKP пересекает ребро DD_1 в точке M .

а) Докажите, что точка M является серединой ребра DD_1 .

б) Найдите расстояние от точки D до плоскости BKP .

Ответ: б) $\frac{240}{\sqrt{2929}}$.

Пример 3.29. [75] ЕГЭ-2024, досрочный вариант, №14.

В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ известно, что $AB = 3$, $AD = 4$ и $AA_1 = 6$. Через точки B_1 и D параллельно прямой AC проведена плоскость, пересекающая ребро CC_1 в точке K .

а) Докажите, что K — середина CC_1 .

б) Найдите расстояние от точки B до плоскости сечения.

Решение. а) Построим сечение. Так как плоскость сечения по условию параллельна AC , то линия пересечения плоскости сечения с плоскостью основания ABC должна быть параллельна AC . Проведем через точку D прямую, параллельную AC . Продлим ребра BC и BA до пересечения с этой прямой в точках P_1 и P_2 соответственно. Точки P_1 и P_2 принадлежат плоскости сечения (рис. 79). Соединим точки

По теореме Пифагора для $\triangle P_2BP_1$:

$$P_1P_2 = \sqrt{BP_2^2 + BP_1^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10.$$

Площадь $\triangle P_2BP_1$ равна:

$$S_{\triangle P_2BP_1} = \frac{1}{2} \cdot BP_2 \cdot BP_1 = 24.$$

С другой стороны, площадь можно выразить через высоту BN :

$$S_{\triangle P_2BP_1} = \frac{1}{2} \cdot P_1P_2 \cdot BN = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot BN \implies BN = \frac{24}{5}.$$

По теореме Пифагора найдем гипотенузу B_1N в $\triangle B_1BN$:

$$B_1N = \sqrt{BB_1^2 + BN^2} = \sqrt{6^2 + \left(\frac{24}{5}\right)^2} = \frac{6\sqrt{41}}{5}.$$

Площадь прямоугольного $\triangle B_1BN$ равна:

$$S_{\triangle B_1BN} = \frac{1}{2} \cdot BB_1 \cdot BN = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot \frac{24}{5} = \frac{72}{5}.$$

С другой стороны

$$S_{\triangle B_1BN} = \frac{1}{2} \cdot B_1N \cdot BH = \frac{1}{2} \cdot \frac{6\sqrt{41}}{5} \cdot BH = \frac{3\sqrt{41}}{5} \cdot BH.$$

Приравнявая оба выражения для площади, имеем

$$\frac{3\sqrt{41}}{5} \cdot BH = \frac{72}{5} \implies BH = \frac{72}{5} \cdot \frac{5}{3\sqrt{41}} = \frac{24}{\sqrt{41}}.$$

Ответ: б) $\frac{24\sqrt{41}}{41}$.

Задача 3.30. В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ известно, что $AB = 2$, $AD = 4$ и $AA_1 = 4$. Через точки A и C_1 параллельно прямой BD проведена плоскость, пересекающая ребро DD_1 в точке M .

а) Докажите, что M — середина DD_1 .

б) Найдите расстояние от точки B до плоскости сечения.

Ответ: б) $\frac{4}{3}$.

Пример 3.31. [75] ЕГЭ-2013, основная волна, Сибирь, №14.

В правильной четырехугольной призме $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ сторона основания равна 20, а боковое ребро $AA_1 = 7$. Точка M принадлежит ребру $A_1 D_1$ и делит его в отношении 2 : 3, считая от вершины D_1 .

а) Докажите, что точки A и C равноудалены от плоскости, проходящей через точки B, D и M .

б) Найдите площадь сечения этой призмы плоскостью, проходящей через точки B, D и M .

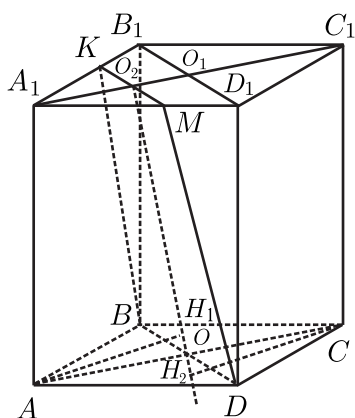


Рис. 80. К примеру 3.31.

РЕШЕНИЕ. а) Плоскость диагонального сечения ACC_1A_1 перпендикулярна диагонали основания BD , так как призма правильная, и, следовательно, $AC \perp BD$ и $AA_1 \perp BD$. Значит, прямая BD перпендикулярна любой прямой, лежащей в плоскости ACC_1A_1 (рис. 80). Пусть O — точка пересечения диагоналей AC и BD , O_1 — точка пересечения диагоналей A_1C_1 и B_1D_1 , O_2 — точка пересечения KM и A_1C_1 . Прямая O_2O является линией пересечения плоскостей BMD и ACC_1A_1 .

Опустим перпендикуляр AH_1 на OO_2 . Покажем, что это и будет искомым расстоянием. Так как $BD \perp AA_1C_1$, то, $BD \perp AH_1$. Таким образом, отрезок AH_1 перпендику-

ларен двум прямым, лежащим в плоскости $BKMD$, следовательно, перпендикулярен плоскости.

Аналогично, расстояние от точки C до плоскости BMD — это длина перпендикуляра CH_2 , опущенного из точки C на прямую O_2O .

$\triangle AOH_1 = \triangle COH_2$ по гипотенузе и острому углу, тогда $AH_1 = CH_2$, а значит точки A и C равноудалены от плоскости BMD .

б) Сечением призмы плоскостью BMD является четырехугольник $BKMD$, где точка K лежит на ребре A_1B_1 . Поскольку плоскость основания $ABCD$ параллельна плоскости основания $A_1B_1C_1D_1$, то линии пересечения плоскости сечения с этими основаниями параллельны: $KM \parallel BD$. Значит, сечение $BKMD$ — это трапеция.

Так как $\triangle A_1B_1D_1$ — равнобедренный прямоугольный треугольник, и $KM \parallel B_1D_1$, то $\triangle A_1KM \sim \triangle A_1B_1D_1$. Из условия $A_1M : MD_1 = 3 : 2$ и $A_1D_1 = 20$, получаем $A_1M = 12$ и $MD_1 = 8$. Тогда коэффициент подобия равен

$$\frac{A_1M}{A_1D_1} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}.$$

Длина диагонали основания $BD = 20\sqrt{2} = B_1D_1$, следовательно,

$$KM = \frac{3}{5}B_1D_1 = \frac{3}{5} \cdot 20\sqrt{2} = 12\sqrt{2}.$$

Найдем боковые стороны трапеции. В прямоугольном $\triangle D_1DM$: $MD = \sqrt{D_1M^2 + DD_1^2} = \sqrt{8^2 + 7^2} = \sqrt{113}$. Из подобия $\triangle A_1KM$ и $\triangle A_1B_1D_1$ следует, что $\frac{A_1K}{A_1B_1} = \frac{3}{5}$, откуда $A_1K = \frac{3}{5} \cdot 20 = 12$, $KB_1 = 8$.

В прямоугольном $\triangle B_1BK$: $BK = \sqrt{KB_1^2 + BB_1^2} = \sqrt{113}$. Так как $BK = MD$, трапеция $BKMD$ — равнобедренная.

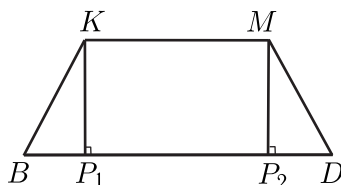


Рис. 81. К примеру 3.31.

В трапеции $BKMD$ проведем высоты KP_1 и MP_2 (рис. 81).

$$BP_1 = \frac{BD - KM}{2} = \frac{20\sqrt{2} - 12\sqrt{2}}{2} = 4\sqrt{2}.$$

В прямоугольном $\triangle BKP_1$:

$$KP_1 = \sqrt{BK^2 - BP_1^2} = \sqrt{(\sqrt{113})^2 - (4\sqrt{2})^2} = 9.$$

Площадь трапеции:

$$S_{BKMD} = \frac{KM + BD}{2} \cdot KP_1 = \frac{12\sqrt{2} + 20\sqrt{2}}{2} \cdot 9 = 144\sqrt{2}$$

Ответ: б) $144\sqrt{2}$.

Задача 3.32. [75] В правильной четырехугольной призме $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ сторона основания равна 11, а боковое ребро $AA_1 = 7$. Точка K принадлежит ребру $B_1 C_1$ и делит его в отношении 8 : 3, считая от вершины B_1 .

- Докажите, что точки A и C равноудалены от плоскости, проходящей через точки B, D и K .
- Найдите площадь сечения этой призмы плоскостью, проходящей через точки B, D и K .

Ответ: б) $63\sqrt{2}$.

Пример 3.33. [75] ЕГЭ-2016, основной вариант, юг, С2.

В правильной четырехугольной призме $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ сторона AB основания равна 6, а боковое ребро AA_1 равно $3\sqrt{2}$. На ребрах BC и $C_1 D_1$ отмечены точки K и L соответственно, причем $BK = 4$, $C_1 L = 5$. Плоскость γ параллельна прямой BD и содержит точки K и L .

а) Докажите, что прямая AC_1 перпендикулярна плоскости γ .

б) Найдите расстояние от точки B_1 до плоскости γ .

РЕШЕНИЕ. а) Плоскость γ параллельна BD , поэтому она пересекает основания по прямым LP_1 и KP_2 , параллельным BD . Таким образом, сечением параллелепипеда плоскостью γ будет трапеция $KP_1 LP_2$. Рассмотрим диагональное сечение $ACC_1 A_1$. Пусть прямая MM_1 —

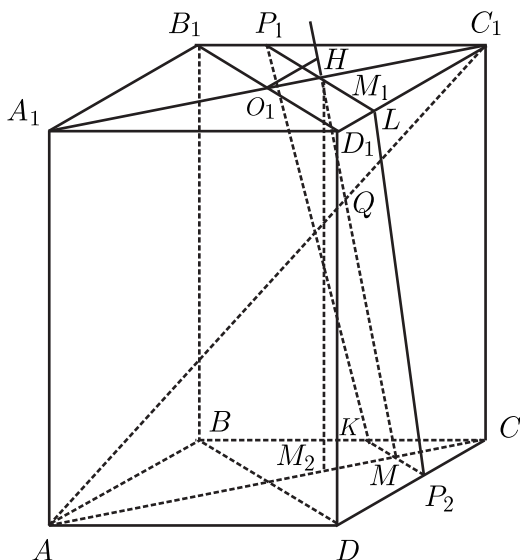


Рис. 82. К примеру 3.33.

линия пересечения плоскости γ с плоскостью ACC_1A_1 , где $M \in AC$, $M_1 \in A_1C_1$. Пусть Q — точка пересечения AC_1 и MM_1 (рис. 82).

В треугольнике M_1QC_1 найдем все стороны и применим теорему, обратную теореме Пифагора. Отметим, что $AC = 6\sqrt{2}$. Точка M на AC такова, что $AM = 6\sqrt{2} - \sqrt{2} = 5\sqrt{2}$. Точка M_1 на A_1C_1 такова, что $C_1M_1 = \frac{5\sqrt{2}}{2}$. Диагональ параллелепипеда

$$AC_1 = \sqrt{(6\sqrt{2})^2 + (3\sqrt{2})^2} = 3\sqrt{10}.$$

$\triangle M_2M_1M$, $M_2M = \frac{5\sqrt{2}}{2} - \sqrt{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$, по теореме Пифагора

$$M_1M = \sqrt{M_2M_1^2 + M_2M^2} = \sqrt{(3\sqrt{2})^2 + \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2} = 3\sqrt{\frac{5}{2}}.$$

Из подобия треугольников $\triangle M_1C_1Q \sim \triangle MAQ$ (по двум углам)

$$\frac{M_1C_1}{AM} = \frac{M_1Q}{MQ} = \frac{C_1Q}{AQ} = \frac{5\sqrt{2}/2}{5\sqrt{2}} = \frac{1}{2}.$$

Отсюда $AQ = 2C_1Q$. Так как $AQ + C_1Q = AC_1 = 3\sqrt{10}$, то $3C_1Q = 3\sqrt{10}$, откуда $C_1Q = \sqrt{10}$, $M_1Q = \frac{1}{3}MM_1 = \sqrt{\frac{5}{2}}$.

Проверим, является ли $\triangle M_1QC_1$ прямоугольным по теореме, обратной теореме Пифагора. $C_1Q^2 + M_1Q^2 = (\sqrt{10})^2 + \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{25}{2}$, $M_1C_1^2 = \frac{25}{2}$. Поскольку $C_1Q^2 + M_1Q^2 = M_1C_1^2$, $\triangle M_1QC_1$ прямоугольный, поэтому $AC_1 \perp MM_1$. Так еще $AC_1 \perp BD$, то $AC_1 \perp \gamma$.

б) Найдем расстояние от центра верхнего основания O_1 до плоскости γ . Это расстояние равно высоте O_1H в $\triangle O_1MM_1$. Из подобия $\triangle O_1HM_1 \sim \triangle AQM$ (по двум углам):

$$\frac{O_1H}{AQ} = \frac{O_1M_1}{AM} \Rightarrow O_1H = \frac{O_1M_1}{AM} \cdot AQ = \frac{1}{5\sqrt{2}\sqrt{2}} \cdot 2\sqrt{10} = \frac{\sqrt{10}}{5}.$$

Так как прямая $O_1B_1 \parallel BD$, то O_1B_1 параллельна плоскости γ . Следовательно, расстояние от точки B_1 до плоскости γ равно расстоянию от точки O_1 до плоскости γ .

Ответ: б) $\frac{\sqrt{10}}{5}$.

Задача 3.34. [75] ЕГЭ-2016, основной вариант, юг, C2.

В правильной четырехугольной призме $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ сторона AB основания равна 8, а боковое ребро AA_1 равно $4\sqrt{2}$. На ребрах BC и $C_1 D_1$ отмечены точки K и L соответственно, причем $BK = C_1 L = 2$. Плоскость γ параллельна прямой BD и содержит точки K и L .

а) Докажите, что прямая $A_1 C$ перпендикулярна плоскости γ .

б) Найдите расстояние от точки B до плоскости γ .

Ответ: б) $\frac{2\sqrt{10}}{5}$.

3.6. Расстояние от точки до прямой в пространстве.

Пример 3.35. [75] ЕГЭ-2013, пробный вариант, С.Петербург, №14. Длины ребер AB , AA_1 и AD прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ равны соответственно 12, 16 и 15.

а) Докажите, что объем пирамиды $A_1 BDC_1$ втрое меньше объема параллелепипеда.

б) Найдите расстояние от вершины A_1 до прямой BD_1 .

РЕШЕНИЕ. а) Объем пирамиды $A_1 BDC_1$ можно найти, вычтя из объема всего параллелепипеда $V_{\text{парал}}$ объемы четырех пирамид по углам: $A_1 ADB$, $D_1 A_1 DC_1$, $C_1 BCD$ и $B_1 A_1 BC_1$ (рис. 83). Объем параллелепипеда:

$$V_{\text{парал}} = AB \cdot AD \cdot AA_1 = 12 \cdot 15 \cdot 16 = 2880.$$

Найдем объемы «угловых» пирамид

$$V_{A_1 ADB} = \frac{1}{3} S_{\triangle ADB} \cdot AA_1 = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2} AD \cdot AB\right) \cdot AA_1 = \frac{1}{6} \cdot 15 \cdot 12 \cdot 16 = 480.$$

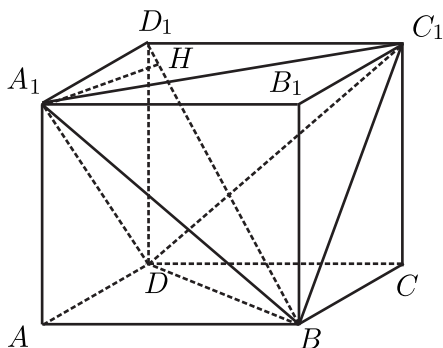


Рис. 83. К примеру 3.35.

$$V_{D_1A_1DC_1} = \frac{1}{3} S_{\triangle A_1D_1C_1} \cdot DD_1 = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2} A_1D_1 \cdot D_1C_1 \right) \cdot DD_1 = \\ = \frac{1}{6} \cdot 15 \cdot 12 \cdot 16 = 480.$$

$$V_{C_1BCD} = \frac{1}{3} S_{\triangle BCD} \cdot CC_1 = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2} BC \cdot CD \right) \cdot CC_1 = \frac{1}{6} \cdot 15 \cdot 12 \cdot 16 = 480.$$

$$V_{B_1A_1BC_1} = \frac{1}{3} S_{\triangle A_1B_1C_1} \cdot BB_1 = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2} A_1B_1 \cdot B_1C_1 \right) \cdot BB_1 = \\ = \frac{1}{6} \cdot 12 \cdot 15 \cdot 16 = 480.$$

Суммарный объем этих четырех пирамид равен $4 \cdot 480 = 1920$. Объем пирамиды A_1BDC_1 равен:

$$V_{A_1BDC_1} = V_{\text{парал}} - 4 \cdot \left(\frac{1}{6} V_{\text{парал}} \right) = \frac{1}{3} V_{\text{парал}}.$$

$$V_{A_1BDC_1} = 2880 - 1920 = 960.$$

Проверяем: $\frac{1}{3} V_{\text{парал}} = \frac{1}{3} \cdot 2880 = 960$.

б) Искомое расстояние — это высота A_1H , опущенная из вершины A_1 на гипотенузу BD_1 в треугольнике $\triangle A_1BD_1$. Найдём стороны этого треугольника. В прямоугольном $\triangle A_1AB$:

$$A_1B = \sqrt{AA_1^2 + AB^2} = \sqrt{16^2 + 12^2} = 20, \quad A_1D_1 = AD = 15.$$

Тогда

$$BD_1 = \sqrt{AB^2 + AD^2 + AA_1^2} = \sqrt{12^2 + 15^2 + 16^2} = 25.$$

Площадь треугольника $\triangle A_1BD_1$ можно вычислить двумя способами:

$$S_{\triangle A_1BD_1} = \frac{1}{2} \cdot A_1D_1 \cdot A_1B = \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot 20 = 150.$$

$$S_{\triangle A_1BD_1} = \frac{1}{2} \cdot BD_1 \cdot A_1H = \frac{1}{2} \cdot 25 \cdot A_1H.$$

Приравняем эти два выражения:

$$\frac{1}{2} \cdot 25 \cdot A_1H = 150 \implies A_1H = \frac{300}{25} = 12.$$

Ответ: б) 12.

Задача 3.36. [75] Длины ребер BC , BB_1 и BA прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1B_1C_1D_1$ равны соответственно 12, 4 и 3.

- Докажите, что расстояние от вершины A_1 до прямой D_1C больше, чем расстояние от вершины D_1 до прямой A_1C .
- Найдите расстояние от вершины D_1 до прямой A_1C .

Ответ: $\frac{60}{13}$.

3.7. Угол между прямыми в пространстве.

Пример 3.37. [11] Непересекающиеся диагонали двух смежных боковых граней прямоугольного параллелепипеда наклонены к плоскости основания под углами α и β (рис. 84). Найдите угол между этими диагоналями.

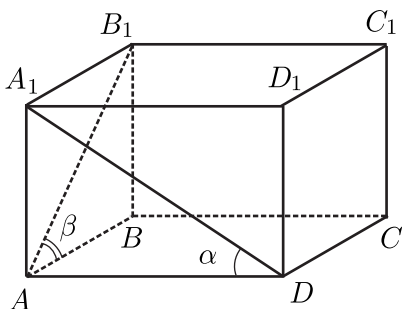


Рис. 84. К примеру 3.37.

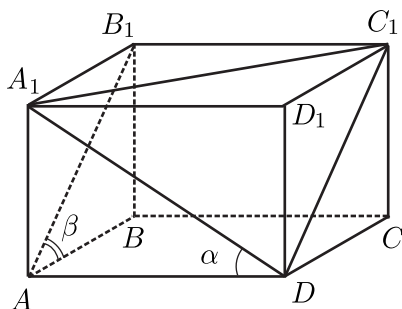


Рис. 85. К примеру 3.37.

РЕШЕНИЕ. Искомый угол между прямыми A_1D и AB_1 будет равен углу между прямыми A_1D и DC_1 , так как $DC_1 \parallel AB_1$ (рис. 85). Найдем его из $\triangle A_1C_1D$ по теореме косинусов. Пусть $AA_1 = c$. Тогда $A_1D = \frac{c}{\sin \alpha}$, а $DC_1 = AB_1 = \frac{c}{\sin \beta}$. Далее, $A_1D_1 = c \operatorname{ctg} \alpha$ и $D_1C_1 = c \operatorname{ctg} \beta$, тогда $A_1C_1 = c\sqrt{\operatorname{ctg}^2 \alpha + \operatorname{ctg}^2 \beta}$. Отсюда по теореме косинусов

$$\cos \angle A_1DC_1 = \frac{\frac{c^2}{\sin^2 \alpha} + \frac{c^2}{\sin^2 \beta} - c^2 (\operatorname{ctg}^2 \alpha + \operatorname{ctg}^2 \beta)}{2 \frac{c}{\sin \alpha} \frac{c}{\sin \beta}} = \sin \alpha \sin \beta.$$

Ответ: $\arccos(\sin \alpha \sin \beta)$.

Задача 3.38. Диагональ прямоугольного параллелепипеда наклонена к плоскости основания под углом β . А диагональ одной из боковых граней наклонена к этой же плоскости под углом $\alpha > \beta$. Под каким углом наклонена диагональ смежной боковой грани к плоскости основания.

Ответ: $\operatorname{arccotg} \sqrt{\operatorname{ctg}^2 \beta - \operatorname{ctg}^2 \alpha}$.

Пример 3.39. [111] ЕГЭ-2022, тренировочный вариант, №13.

В правильной четырехугольной призме $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ с основанием $ABCD$ боковое ребро равно $\sqrt{3}$, а сторона основания равна 2. Через точку A_1 перпендикулярно плоскости $AB_1 D_1$ проведена прямая l .

а) Докажите, что прямая l пересекает отрезок AC и делит его в отношении 3 : 1.

б) Найдите угол между прямыми l и CB_1 .

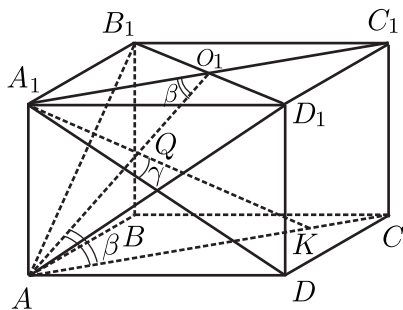


Рис. 86. К примеру 3.39.

РЕШЕНИЕ.

а) Проведем $A_1 Q \perp AO_1$, где O_1 — точка пересечения диагоналей квадрата $A_1 B_1 C_1 D_1$ (рис. 86). Так как $B_1 D_1 \perp AA_1 C_1 C$, то $B_1 D_1 \perp A_1 Q$, следовательно, $A_1 Q \perp AB_1 D_1$, поскольку она перпендикулярна двум прямым, лежащим в этой плоскости. Продлим $A_1 Q$ до пересечения с AC (они пересекаются, так как лежат в одной плоскости $AA_1 C_1 C$ и не параллельны).

Рассмотрим $\triangle AA_1 O_1$:

$$A_1 O_1 = \sqrt{2}, \quad AO_1 = \sqrt{AA_1^2 + A_1 O_1^2} = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (\sqrt{2})^2} = \sqrt{5},$$

$$\cos \beta = \frac{A_1 O_1}{AO_1} = \sqrt{\frac{2}{5}}.$$

Рассмотрим прямоугольный $\triangle A_1 O_1 Q$. Катет $QO_1 = A_1 O_1 \cos \beta = \frac{2}{\sqrt{5}}$.

Отсюда

$$AQ = AO_1 - QO_1 = \sqrt{5} - \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{3}{\sqrt{5}}.$$

Треугольники $\triangle A_1 O_1 Q$ и $\triangle K A Q$ подобны по двум углам. Тогда

$$\frac{AK}{A_1 O_1} = \frac{AQ}{QO_1} \Rightarrow \frac{AK}{\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{2} \Rightarrow AK = \frac{3\sqrt{5}}{2}.$$

Поскольку $AC = 2\sqrt{2}$, то $KC = 2\sqrt{2} - \frac{3\sqrt{5}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Следовательно, $\frac{AK}{KC} = \frac{3}{1}$.

б) Поскольку $A_1D \parallel B_1C$, то по определению угла между скрещивающимися прямыми угол между l и CB_1 равен $\angle DA_1K$. Рассмотрим $\triangle AA_1D$:

$$A_1D = \sqrt{AA_1^2 + AD^2} = \sqrt{3 + 4} = \sqrt{7}.$$

$$\text{Из } \triangle AA_1K \quad A_1K = \sqrt{AA_1^2 + AK^2} = \sqrt{3 + \frac{9}{2}} = \sqrt{\frac{15}{2}}.$$

В $\triangle AKD$ воспользуемся теоремой косинусов:

$$KD^2 = AK^2 + AD^2 - 2AK \cdot AD \cdot \cos 45^\circ = \frac{9}{2} + 4 - 2 \cdot \frac{3}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{5}{2}.$$

Отсюда найдем угол γ по теореме косинусов для $\triangle A_1KD$:

$$\cos \gamma = \frac{A_1D^2 + A_1K^2 - KD^2}{2A_1D \cdot A_1K} = \frac{7 + \frac{15}{2} - \frac{5}{2}}{2\sqrt{7} \cdot \sqrt{\frac{15}{2}}} = \frac{2\sqrt{210}}{35}.$$

$$\text{Ответ: } \arccos \frac{2\sqrt{210}}{35}.$$

Задача 3.40. [111] ЕГЭ-2022, тренировочный вариант, №13.

В правильной призме $ABCA_1B_1C_1D_1$ с основанием $ABCD$ боковое ребро равно 2, а сторона основания равна $\sqrt{6}$. Через точку A_1 перпендикулярно плоскости AB_1D_1 проведена прямая l .

а) Докажите, что прямая l пересекает отрезок AC и делит его в отношении 2 : 1.

б) Найдите угол между прямыми l и CD_1 .

$$\text{Ответ: } \arccos \frac{2\sqrt{210}}{35}.$$

Пример 3.41. МГУ, ф-т ВМК, 2002 (июль), №3(6).

Дан прямоугольный параллелепипед $ABCA_1B_1C_1D_1$, у которого $AD = 8$, $AB = 3$ и $AA_1 = 4$. Найдите угол между прямой B_1D и прямой, проходящей через середины ребер AA_1 и B_1C_1 .

РЕШЕНИЕ. Пусть M — середина ребра AA_1 , а N — середина ребра B_1C_1 . Требуется найти угол между прямыми B_1D и MN (рис. 87).

Для нахождения угла воспользуемся методом параллельного переноса. Достроим слева параллелепипед, добавив половину ширины исходного. Тогда $M_2B_1 \parallel MN$, так как M_2B_1NM — параллелограмм ($M_2M \parallel B_1N$, $M_2M = B_1N$). Угол между скрещивающимися прямыми MN и B_1D равен углу $\angle M_2B_1D$. Поскольку B_1D — диагональ параллелепипеда, ее квадрат длины равен сумме квадратов трех измерений:

$$B_1D^2 = AB^2 + AD^2 + AA_1^2 = 3^2 + 8^2 + 4^2 = 89 \implies B_1D = \sqrt{89}.$$

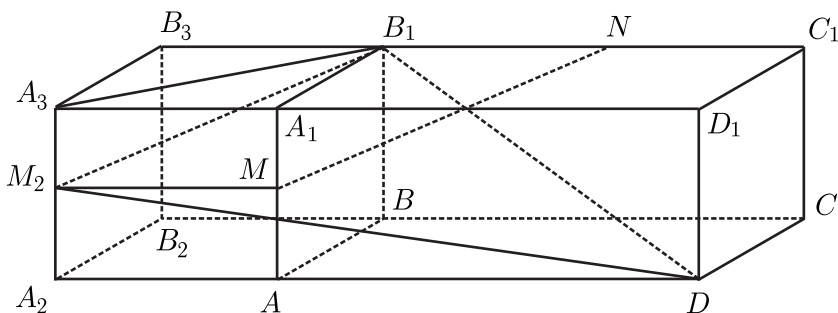


Рис. 87. К примеру 3.41.

Треугольник $A_3B_3B_1$ — египетский, поэтому $A_3B_1 = 5$. Из $\triangle M_2A_3B_1$

$$M_2B_1 = \sqrt{M_2A_3^2 + A_3B_1^2} = \sqrt{4 + 25} = \sqrt{29}.$$

Из $\triangle A_2M_2D$

$$M_2D = \sqrt{M_2A_2^2 + A_2D^2} = \sqrt{4 + 144} = \sqrt{148}.$$

Для нахождения угла $\angle M_2B_1D$ применим теорему косинусов в $\triangle M_2B_1D$:

$$\begin{aligned} M_2D^2 &= M_2B_1^2 + B_1D^2 - 2 \cdot M_2B_1 \cdot B_1D \cdot \cos \angle M_2B_1D \Rightarrow \\ \cos \angle M_2B_1D &= \frac{M_2B_1^2 + B_1D^2 - M_2D^2}{2 \cdot M_2B_1 \cdot B_1D} = \frac{29 + 89 - 148}{2 \cdot \sqrt{29} \cdot \sqrt{89}} = -\frac{15}{\sqrt{2581}}. \end{aligned}$$

Искомый острый угол $\alpha = \arccos \frac{15}{\sqrt{2581}}$.

Ответ: $\arccos \frac{15}{\sqrt{2581}}$.

Задача 3.42. МГУ, ф-т ВМК, 2002 (июль), №3(6).

Дан прямоугольный параллелепипед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, у которого $AD = 6$, $AB = 3$ и $AA_1 = 2$. Найдите угол между прямой AC_1 и прямой, проходящей через середины ребер AA_1 и B_1C_1 .

Ответ: $\arccos \frac{29}{7\sqrt{19}}$.

3.8. Объем параллелепипеда.

Пример 3.43. [18] Основанием прямого параллелепипеда служит параллелограмм, один из углов которого равен 30° . Площадь основания равна 4 дм^2 . Площади боковых граней параллелепипеда равны 6 и 12 дм^2 . Найдите объем параллелепипеда.

РЕШЕНИЕ. Пусть a, b — стороны основания, а c — боковое ребро. Площадь основания:

$$S_1 = ab \sin 30^\circ = 4 \Rightarrow ab = 8.$$

Площади боковых граней:

$$S_2 = ac = 6, \quad S_3 = bc = 12.$$

Тогда

$$\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2} \implies b = 2a.$$

Отсюда

$$S_1 = a(2a) = 8 \implies a = 2; \quad b = 2a = 4, \quad c = \frac{6}{a} = \frac{6}{2} = 3.$$

Объем параллелепипеда:

$$V = c \cdot S_1 = 3 \cdot 4 = 12.$$

Ответ: 12 дм³.

Задача 3.44. [18] В основании прямого параллелепипеда лежит параллелограмм со сторонами 1 и 4 см и острым углом 60°. Большая диагональ параллелепипеда равна 5 см. Определите его объем.

Ответ: $4\sqrt{3}$ см³.

Пример 3.45. ЕГЭ-2022, основной вариант, №13.

В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ на диагонали BD_1 отмечена точка N так, что $BN : ND_1 = 1 : 2$. Точка O — середина отрезка CB_1 .

а) Докажите, что прямая NO проходит через точку A .

б) Найдите объем параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, если длина отрезка NO равна расстоянию между прямыми BD_1 и CB_1 и равна $\sqrt{2}$.

РЕШЕНИЕ. а) Рассмотрим плоскость $AD_1 C_1 B$. Прямые AO и $D_1 B$ лежат в этой плоскости и не параллельны, следовательно, они пересекаются в некоторой точке. Докажем, что эта точка делит диагональ BD_1 в отношении 1 : 2, считая от точки B . Если это так, то она совпадает с точкой N , и, следовательно, точки A , N , O лежат на одной прямой (рис. 88).

Пусть $BN = x$, $ND_1 = 2x$. В плоскости $AD_1 CB$ проведем через точку O прямую OO_2 , параллельную AB и пересекающую BD_1 в точке M . Треугольник $\triangle ANB$ и $\triangle ONM$ подобны по двум углам. Отсюда

$$\frac{MN}{NB} = \frac{MO}{OB} \implies MN = \frac{1}{2} NB = \frac{1}{2} x,$$

$$D_1 M = MB = \frac{3}{2} x \implies D_1 N = \frac{3}{2} x + \frac{1}{2} x = 2x.$$

Следовательно, точка пересечения делит BD_1 в отношении 1 : 2, считая от точки B .

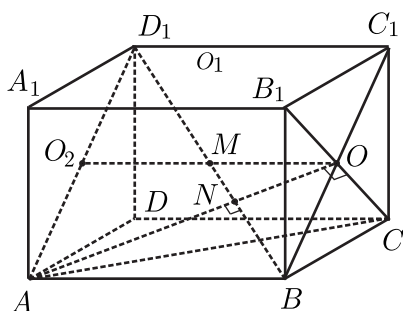


Рис. 88. К примеру 3.45.

б) По условию длина отрезка NO равна расстоянию между скрещивающимися прямыми BD_1 и CB_1 . Так как точка $N \in BD_1$, а точка $O \in B_1C$, то NO является их общим перпендикуляром, то есть $NO \perp BD_1$ и $NO \perp CB_1$.

Из доказанного в пункте а) следует, что A, N, O лежат на одной прямой. Из подобия $\triangle ANB$ и $\triangle ONM$ следует, что $AN = 2NO = 2\sqrt{2}$.

Так как $AO \perp CB_1$, то по теореме о трех перпендикулярах $OB \perp CB_1$. В прямоугольнике BCC_1B_1 диагонали перпендикулярны только если он является квадратом. Следовательно, $BB_1 = BC$.

Обозначим $AB = a$, $BC = BB_1 = b$. Рассмотрим прямоугольный треугольник $\triangle BON$ ($\angle BNO = 90^\circ$, так как $NO \perp BD_1$). Точка O — середина CB_1 , CB_1 — диагональ квадрата со стороной b , значит $CB_1 = b\sqrt{2}$. $BO = \frac{1}{2}CB_1 = \frac{b\sqrt{2}}{2}$. По теореме Пифагора для $\triangle BON$:

$$BO^2 = BN^2 + NO^2 \Rightarrow \left(\frac{b\sqrt{2}}{2}\right)^2 = BN^2 + (\sqrt{2})^2 \Rightarrow \frac{b^2}{2} = x^2 + 2.$$

Рассмотрим прямоугольный треугольник $\triangle ABN$. По теореме Пифагора

$$AB^2 = AN^2 + BN^2 \Rightarrow a^2 = 8 + x^2.$$

Из $\triangle AD_1B$

$$BD_1^2 = AD_1^2 + AB^2 \Rightarrow 9x^2 = 2b^2 + a^2.$$

Решая полученную систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{b^2}{2} = x^2 + 2, \\ a^2 = 8 + x^2, \\ 9x^2 = 2b^2 + a^2, \end{cases}$$

находим, что $b^2 = a^2 = 12$, следовательно, объем $V = 12^{3/2} = 24\sqrt{3}$.
 Ответ: $24\sqrt{3}$.

Задача 3.46. [75] ЕГЭ-2022, основная волна, №13.

В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ на диагонали BD_1 отмечена точка N так, что $BN : ND_1 = 1 : 2$. Точка O — середина отрезка CB_1 .

а) Докажите, что прямая NO проходит через точку A .

б) Найдите объем параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, если длина отрезка NO равна расстоянию между прямыми BD_1 и CB_1 и равна $\sqrt{6}$.

Ответ: б) 216.

Задача 3.47. Черноморский ф-л МГУ, 2008 (июль), №6(10).

В прямоугольном параллелепипеде упорядоченные по возрастанию площади трех граней образуют геометрическую прогрессию со знаменателем 2. Найдите объем параллелепипеда, если наименьшая площадь грани равна 1 см^2 .

Ответ: $2\sqrt{2} \text{ см}^3$.

Задача 3.48. [1] МГУ, физический ф-т, 1996 (июль), №6(8).

В прямоугольном параллелепипеде диагональ, равная d , образует с боковыми гранями углы β и γ . Найдите объем параллелепипеда.

Ответ: $d^3 \sin \beta \sin \gamma \sqrt{\cos^2 \gamma - \sin^2 \beta}$.

3.9. Наклонный параллелепипед.

Пример 3.49. [18] Основанием параллелепипеда служит квадрат. Одна из вершин верхнего основания одинаково отстоит от всех вершин нижнего основания и удалена от плоскости этого основания на расстояние, равное b . Сторона основания равна a . Определите полную поверхность параллелепипеда.

РЕШЕНИЕ. Пусть вершина A_1 равноудалена от вершин основания, тогда она является вершиной правильной четырехугольной пирамиды A_1ABCD (рис. 89), где A_1O — высота пирамиды, равная b . Тогда

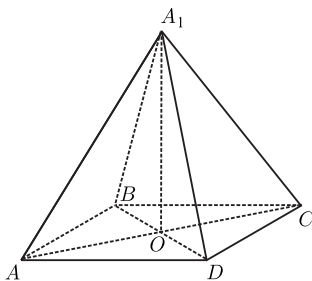


Рис. 89. К примеру 3.49.

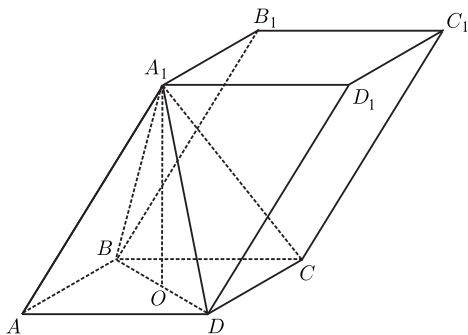


Рис. 90. К примеру 3.49.

из прямоугольного треугольника $\triangle A_1OD$ $A_1D = \sqrt{\frac{a^2}{2} + b^2}$. Апофема

пирамиды равна $\sqrt{\frac{a^2}{2} + b^2 - \frac{a^2}{4}} = \sqrt{\frac{a^2}{4} + b^2}$. У наклонного параллелепипеда (рис. 90), у которого в основании лежит квадрат, все боковые грани равны, и апофема пирамиды является высотой боковой грани параллелепипеда. Следовательно, площадь боковой грани равна

$a\sqrt{\frac{a^2}{4} + b^2}$. Тогда площадь полной поверхности параллелепипеда равна

$$2a^2 + 4a\sqrt{\frac{a^2}{4} + b^2}.$$

Ответ: $2a \cdot \left(a + \sqrt{4b^2 + a^2}\right).$

Задача 3.50. [18] Основанием наклонного параллелепипеда служит ромб $ABCD$ со стороной, равной a , и острым углом 60° . Ребро AA_1 также равно a и образует с ребрами AB и AD углы 45° . Определите объем параллелепипеда.

Ответ: $0,5a^3$.

Задача 3.51. [18] Основанием наклонного параллелепипеда служит ромб со стороной a и острым углом 30° . Диагональ одной боковой грани перпендикулярна плоскости основания, а боковое ребро составляет с плоскостью основания угол 60° . Найдите полную поверхность и объем параллелепипеда.

Ответ: $a^2 \left(1 + 2\sqrt{3} + \sqrt{13}\right), \quad a^3 \frac{\sqrt{3}}{2}.$

3.10. Задачи повышенной сложности.

- [75] Дана правильная четырехугольная призма $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. На ребре BB_1 отмечена точка Q такая, что $BQ : QB_1 = 2 : 7$. Плоскость α проходит через точки A и Q параллельно прямой BD . Эта плоскость пересекает ребро CC_1 в точке M .

а) Докажите, что $C_1 M : CC_1 = 5 : 9$.

б) Найдите площадь сечения, если $AB = 3\sqrt{2}$, $AA_1 = 18$.

Ответ: б) 30.

- МГУ, экономический ф-т, 2002 (июль), №7(7).
Двугранный угол между плоскостями оснований двух равных прямоугольных параллелепипедов равен 120° . Найдите объем их общей части, если известно, что эти параллелепипеды имеют общую диагональ, длина ребер их оснований равна 1, а длина всех других ребер равна $\sqrt{6}$.

Ответ: $\frac{4\sqrt{6}}{9}.$

3.11. Ответы к задачам на построение сечений.

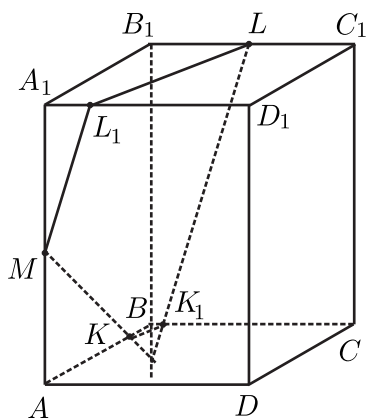


Рис. 91. К задаче 3.2.

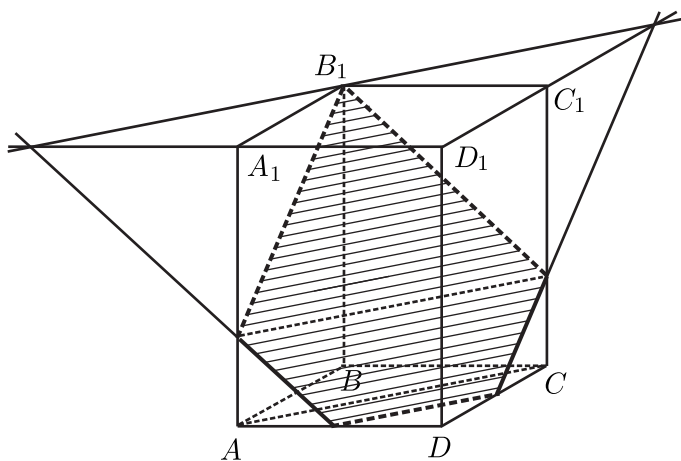


Рис. 92. К задаче 3.21.

3.12. Задачи для самостоятельного решения.

Обязательные задачи.

1. [3] В сечении прямоугольного параллелепипеда с квадратным основанием плоскостью получается ромб. Найдите внутренние углы ромба, если двугранный угол между плоскостью сечения и плоскостью основания равен 30° .

2. [3] В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ ребро $AB = a$, $BC = a$, $AA_1 = b$. Найдите площадь сечения, проходящего через вершину A и перпендикулярного диагонали BD_1 .
3. [18] Основанием прямого параллелепипеда является параллелограмм с углом 120° и сторонами 3 и 4 см. Меньшая диагональ параллелепипеда равна большей диагонали основания. Найдите объем параллелепипеда.
4. [75] На ребре BB_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ взята точка F так, что $B_1 F : FB = 3 : 4$. Точка T — середина ребра $B_1 C_1$. Известно, что $AB = 3\sqrt{3}$, $AD = 12$, $AA_1 = 14$.
- Докажите, что плоскость FTD_1 делит ребро AA_1 в отношении $6 : 1$.
 - Найдите площадь сечения параллелепипеда плоскостью FTD_1 .
5. [75] На ребре AA_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ взята точка E так, что $A_1 E : EA = 5 : 3$, на ребре BB_1 — точка F так, что $B_1 F : FB = 5 : 11$, а точка T — середина ребра $B_1 C_1$. Известно, что $AB = 6\sqrt{2}$, $AD = 10$, $AA_1 = 16$.
- Докажите, что плоскость EFT проходит через вершину D_1 .
 - Найдите площадь сечения параллелепипеда плоскостью EFT .
6. [75] На ребре AA_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ взята точка E так, что $A_1 E = 6EA$. Точка T — середина ребра $B_1 C_1$. Известно, что $AB = 4\sqrt{2}$, $AD = 12$, $AA_1 = 14$.
- Докажите, что плоскость ETD_1 делит ребро BB_1 в отношении $4 : 3$.
 - Найдите площадь сечения параллелепипеда плоскостью ETD_1 .
7. [75] ЕГЭ-2013, основная волна, восток, №14.
В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ известны ребра $AB = 8$, $AD = 7$ и $AA_1 = 5$. Точка W принадлежит ребру DD_1 и делит его в отношении $1 : 4$, считая от вершины D .
- Докажите, что любая плоскость, проходящая через вершины A_1 и C , делит параллелепипед на две равновеликие фигуры.
 - Найдите площадь сечения этого параллелепипеда плоскостью, проходящей через точки C , W и A_1 .

8. [75] ЕГЭ-2022, пробный вариант, Москва, №14.
На ребре AA_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ отмечена точка E так, что $A_1 E : EA = 3 : 2$. Точка T — середина ребра $B_1 C_1$. Длины ребер AD и AA_1 равны 6 и 10 соответственно.
- а) Докажите, что сечение параллелепипеда плоскостью ETD_1 является равнобедренной трапецией.
 - б) Найдите площадь сечения параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ плоскостью ETD_1 , если $AB = 2\sqrt{10}$.
9. [3] Диагональ d основания прямоугольного параллелепипеда образует со стороной основания угол φ . Угол между этой стороной и диагональю параллелепипеда равен β . Найдите площадь боковой поверхности параллелепипеда.
10. В основании прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ лежит квадрат $ABCD$ со стороной, равной 3. Боковое ребро параллелепипеда равно 4. На ребре AA_1 отмечена точка M так, что $AM : A_1 M = 1 : 3$.
- а) Постройте сечение параллелепипеда плоскостью BMD_1 .
 - б) Найдите площадь полученного сечения.
11. [107] ЕГЭ-2022, тренировочный вариант, №14.
В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ известны ребра $AB = 4, AD = 3, AA_1 = 7$. Точка O принадлежит ребру BB_1 и делит его в отношении $3 : 4$, считая от вершины B .
- а) Постройте сечение параллелепипеда плоскостью, проходящей через точки A, O и C_1 .
 - б) Найдите площадь этого сечения.
12. [107] ЕГЭ-2022, тренировочный вариант, №14.
В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ известны ребра $AB = 5, AD = 3, AA_1 = 8$. Точка R принадлежит ребру AA_1 и делит его в отношении $3 : 5$, считая от вершины A .
- а) Постройте сечение параллелепипеда плоскостью, проходящей через точки B, R и D_1 .
 - б) Найдите площадь этого сечения.
13. [75] На ребре AA_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ взята точка E так, что $A_1 E : EA = 4 : 3$. Точка T — середина ребра $B_1 C_1$. Известно, что $AB = 5, AD = 8, AA_1 = 14$.
- а) В каком отношении плоскость ETD_1 делит ребро BB_1 ?
 - б) Найдите угол между плоскостью ETD_1 и плоскостью $AA_1 B_1$.
14. [75] В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ ребра $BC = 8, CD = 3, BB_1 = 6$. Точка Q — середина ребра CC_1 . Найдите угол между плоскостями $BD_1 Q$ и ABC .

15. [75] ЕГЭ-2016, пробный вариант, С.Петербург, №14.
В правильной четырехугольной призме $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ точка K делит боковое ребро AA_1 в отношении $AK : KA_1 = 1 : 2$. Через точки B и K проведена плоскость α , параллельная прямой AC и пересекающая ребро DD_1 в точке M .
- а) Докажите, что плоскость α делит ребро DD_1 в отношении $DM : MD_1 = 2 : 1$.
 - б) Найдите площадь сечения, если известно, что $AB = 4$, $AA_1 = 6$.
16. МГУ, ф-т Гос. управления, 2008 (июль), №4(8).
В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ ($ABCD$ и $A_1 B_1 C_1 D_1$ — основания, $AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1 \parallel DD_1$) известны длины отрезков: $AD_1 = \sqrt{34}$, $AC = \sqrt{58}$, $AB_1 = \sqrt{74}$. Найдите объем параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$.
17. [114] В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ известны длины ребер $AA_1 = 7$, $AB = 16$, $AD = 6$. Точка K — середина ребра $C_1 D_1$
- а) Докажите, что плоскость, проходящая через точку B перпендикулярно прямой AK , пересекает отрезок $A_1 K$.
 - б) Найдите тангенс угла между этой плоскостью и плоскостью ABC .
18. [75] Длины ребер BC , BB_1 и BA прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ равны соответственно 8, 12 и 9.
- а) Докажите, что расстояние от вершины A_1 до прямой $D_1 C$ больше, чем расстояние от вершины D_1 до прямой $A_1 C$.
 - б) Найдите расстояние от вершины D_1 до прямой $A_1 C$.
19. [18] Ребро наклонного параллелепипеда равно l . К нему примыкают две смежные грани, у которых площади равны m^2 и n^2 , а их плоскости образуют угол 30° . Вычислите объем параллелепипеда.
20. [1] МГУ, физический ф-т, 1996 (июль), №6(8).
В прямоугольном параллелепипеде диагональ, равная m , образует с боковыми гранями углы α и β . Найдите объем параллелепипеда.
21. [3] Через диагональ AC квадрата, лежащего в основании прямого параллелепипеда, и вершину другого основания параллелепипеда проведена плоскость так, что в сечении получился $\triangle AB_1 C$ с углом при вершине B_1 в два раза большим, чем угол между плоскостью сечения и основанием параллелепипеда. Найдите $\angle AB_1 C$.

22. МГУ, ф-т ВМК, отделение бакалавров, 2002 (июль), №3(6).
Дан прямоугольный параллелепипед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, у которого $AD = 4$, $AB = 5$ и $AA_1 = 6$. Найдите угол между прямой AC_1 и прямой, проходящей через середины ребер AA_1 и $B_1 C_1$.
23. ЕГЭ-2025, основная волна, №14.
Точка O — центр грани $A_1 B_1 C_1 D_1$ прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Сечения параллелепипеда плоскостями AOB и BOC являются прямоугольниками, стороны AB и BC этих сечений в 3 раза меньше соответственных больших сторон сечений.
а) Докажите, что $ABCD$ — квадрат.
б) Найдите угол между прямой $A_1 C$ и плоскостью BOC .

Дополнительные задачи.

1. МГУ, ф-т ВМК, задачи устного экзамена, 2001.
Дан прямоугольный параллелепипед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, $AD = a$, $AB = b$. На ребре DD_1 выбрана точка M так, что получившейся в сечении прямоугольного параллелепипеда плоскостью, проходящей через точки A , C_1 и M , четырехугольник имеет наименьший возможный периметр. Найдите $DM : MD_1$.
Совет. Сделайте развертку граней $AA_1 D_1 D$ и $DD_1 C_1 C$.

§ 4. Призмы

4.1. Основные определения и утверждения.

Определение 4.1 Призма — это многогранник, две грани которого (основания) являются равными многоугольниками в параллельных плоскостях, а остальные (боковые) грани — параллелограммами.

1. Боковые ребра призмы параллельны и равны между собой.
2. Прямая призма — это призма, в которой все боковые грани перпендикулярны к основанию. Высота равна длине бокового ребра.
3. Правильная призма — это прямая призма, в которой основания являются правильными многоугольниками.
4. Объем призмы $V = S_{\text{осн}} \cdot H$, где H — высота призмы.
5. Также объем призмы равен произведению длины бокового ребра на площадь перпендикулярного ему сечения

$$V = S \cdot l. \quad (4.1)$$

6. Площадь боковой поверхности призмы $S_{\text{бок}} = P \cdot h$, где P — периметр основания, h — высота боковой грани. Площадь полной поверхности призмы $S = 2S_{\text{осн}} + P \cdot h$.

4.2. Построение сечений. Площадь сечения.

Пример 4.1. [105] В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ стороны основания равны 10, боковые ребра равны 12.

а) Докажите, что сечение, проходящее через вершины A , B и середину ребра A_1C_1 , является равнобедренной трапецией.

б) Найдите площадь данного сечения.

РЕШЕНИЕ. а) Поскольку плоскости ABC и $A_1B_1C_1$ параллельны, плос-

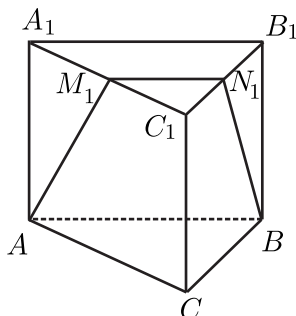


Рис. 93. К примеру 4.1.

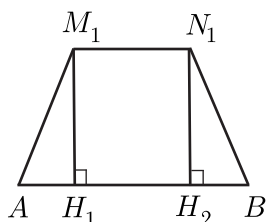


Рис. 94. К примеру 4.1.

кость сечения, проходящего через вершины A , B и середину M_1 ребра A_1C_1 , пересекает их по параллельным прямым M_1N_1 и AB (рис. 93). Кроме того, $\triangle AA_1M_1 = \triangle BB_1N_1$ по двум катетам. Отсюда следует, что AM_1N_1B — равнобедренная трапеция.

б) По условию $AM_1 = \frac{1}{2}A_1C_1 = 5$, $AA_1 = 12$. Из прямоугольного треугольника AA_1M_1 получаем, что $AM_1 = 13$. Далее, $M_1N_1 = \frac{1}{2}A_1B_1 = 5$ как средняя линия $\triangle A_1B_1C_1$. Проведем в равнобедренной трапеции AM_1N_1B высоты M_1H_1 и N_1H_2 (рис. 94), причем $MH_1 = BH_2 = \frac{5}{2}$. Из прямоугольного треугольника AM_1H_1 находим высоту трапеции

$AH_1 = \sqrt{13^2 - \frac{25}{4}} = \frac{\sqrt{651}}{2}$. Следовательно,

$$S_{AM_1N_1B} = \frac{1}{2}(5 + 10) \cdot \frac{\sqrt{651}}{2} = \frac{15\sqrt{651}}{4}.$$

Ответ: б) $\frac{15}{4}\sqrt{651}$.

Задача 4.2. [112] В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ стороны основания равны 12, боковые ребра равны 8.

а) Докажите, что сечение, проходящее через вершины A , B и середину ребра A_1C_1 , является равнобедренной трапецией.

б) Найдите площадь данного сечения.

Ответ: $9\sqrt{91}$.

Пример 4.3. [89] В правильной шестиугольной призме $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ стороны основания равны 5, а боковые ребра равны 11.

а) Докажите, что прямые CA_1 и $C_1 D_1$ перпендикулярны.

б) Найдите площадь сечения призмы плоскостью, проходящей через вершины C , A_1 и F_1 .

РЕШЕНИЕ. а) Из свойств правильного шестиугольника $ABCDEF$

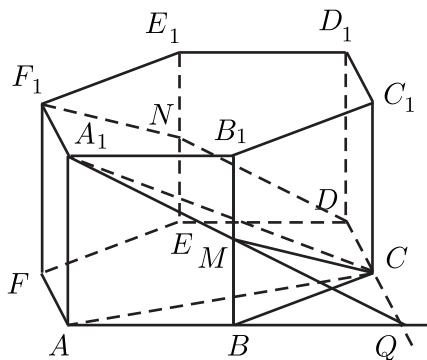


Рис. 95. К примеру 4.3.

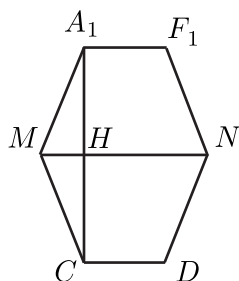


Рис. 96. К примеру 4.3.

$AC \perp DC$, следовательно, по теореме о трех перпендикулярах $CA_1 \perp DC$. Так как $C_1 D_1 \parallel CD$, то $CA_1 \perp C_1 D_1$ (рис. 95).

б) Построим сечение призмы плоскостью, проходящей через вершины C , A_1 и F_1 . Параллельные основания призмы плоскость сечения пересекает по параллельным прямым. Так как сечение проходит через точку C , то оно пройдет и через точку D , поскольку $DC \parallel A_1 F_1$. Продолжим отрезки AB и DC до их пересечения в точке Q . Точка Q принадлежит плоскости сечения, плоскости основания ABC и плоскости ABB_1 . Прямая $A_1 Q \in ABB_1$ и пересекает BB_1 в точке M . Так как $\triangle BCQ$ равносторонний и $AB = BC$, то $AB = BQ$. Поскольку $AA_1 \parallel BB_1$, то MB — средняя линия $\triangle AA_1 Q$, следовательно, $BM = B_1 M = \frac{1}{2} AA_1 = \frac{5}{2}$.

Плоскость сечения пересекает грань $FF_1 E_1 E$ по прямой $F_1 N \parallel MC$, поскольку грани $FF_1 E_1 E$ и $BB_1 C_1 C$ параллельны. Аналогично, грань $EE_1 D_1 D$ — по прямой $DN \parallel A_1 M$. Если M — середина BB_1 , то N — середина EE_1 . Таким образом, сечение $A_1 F_1 N D C M$ построено. Найдём его площадь. Так как из свойств правильного шестиугольника $ABCDEF$ $BE = 2AB = 10$, а $MN \parallel BE$, то $MN = 10$. Найдём $A_1 H$ (рис. 96). $MH = \frac{1}{2}(MN - CD) = \frac{5}{2}$. Из прямоугольного треугольника $\triangle A_1 B_1 M$

$$A_1 M = \sqrt{A_1 B_1^2 + B_1 M^2} = \sqrt{25 + \frac{121}{4}} = \frac{\sqrt{221}}{2}.$$

Из $\triangle A_1MH$ $A_1H = \sqrt{\frac{221}{4} - \frac{25}{4}} = 7$. Площадь трапеции MA_1F_1N равна $S = \frac{5+10}{2} \cdot 7 = \frac{105}{2}$. Следовательно, площадь всего сечения равна $2S = 105$.

Ответ: б) 105.

Задача 4.4. Пусть $ABCDEF A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ — правильная шестиугольная призма, в которой все ребра равны между собой. Постройте сечение призмы плоскостью DB_1F_1 .

Ответ: рис. 118.

4.3. Задачи на отношения.

Пример 4.5. ЕГЭ-2023, основной вариант, №13.

Дана прямая призма $ABCA_1B_1C_1$. ABC — равнобедренный треугольник с основанием AB . На AB отмечена точка P такая, что $AP : PB = 3 : 1$. Точка Q делит пополам ребро B_1C_1 . Точка M делит пополам ребро BC . Через точку M проведена плоскость α , перпендикулярная PQ .

а) Докажите, что прямая AB параллельна плоскости α .

б) Найдите отношение, в котором плоскость α делит отрезок PQ , если $AA_1 = 5$, $AB = 12$, $\cos \angle ABC = \frac{3}{5}$.

РЕШЕНИЕ. а) Докажем, что $PQ \perp AB$, тогда $AB \parallel \alpha$ (рис. 97).

Пусть N — середина AB , тогда CN — биссектриса, медиана, высота равнобедренного $\triangle ABC$. Следовательно, $CN \perp AB$. Точка M — середина BC . Точка P делит AB в отношении $3 : 1$, значит $PB = \frac{1}{4}AB = \frac{1}{4} \cdot 12 = 3$. Так как N — середина AB , то $BN = 6$. Тогда P является серединой отрезка BN . В $\triangle BCN$ отрезок MP соединяет середины сторон BC и BN , следовательно, MP — средняя линия $\triangle BCN$, и $MP \parallel CN$. Так как $CN \perp AB$ и $MP \parallel CN$, то $MP \perp AB$.

По условию точка Q — середина B_1C_1 , M — середина BC . Значит $QM \parallel BB_1$. Так как призма прямая, $BB_1 \perp ABC$, следовательно $QM \perp ABC$. QP — наклонная к плоскости ABC , а MP — ее проекция. Поскольку проекция MP перпендикулярна прямой AB , то по теореме о трех перпендикулярах и наклонная QP перпендикулярна AB . Плоскость α по условию перпендикулярна PQ , а так как прямая AB перпендикулярна PQ , то она параллельна плоскости α .

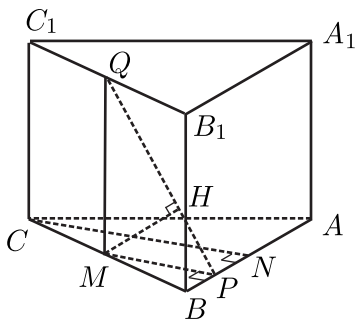


Рис. 97. К примеру 4.5.

б) Найдем стороны $\triangle BCN$. $BN = \frac{1}{2}AB = 6$. В прямоугольном треугольнике $\triangle BCN$ ($\angle BNC = 90^\circ$):

$$BC = \frac{BN}{\cos \angle ABC} = \frac{6}{3/5} = 10.$$

$$CN = \sqrt{BC^2 - BN^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8.$$

Так как MP — средняя линия $\triangle BCN$, то

$$MP = \frac{1}{2}CN = 4.$$

Здесь QM — отрезок, соединяющий середины параллельных ребер BC и B_1C_1 , его длина равна боковому ребру: $QM = AA_1 = 5$. Рассмотрим $\triangle QMP$. Так как $QM \perp ABC$, то $QM \perp MP$, значит $\triangle QMP$ — прямоугольный. По теореме Пифагора:

$$QP = \sqrt{QM^2 + MP^2} = \sqrt{5^2 + 4^2} = \sqrt{41}.$$

Плоскость α проходит через точку M и перпендикулярна PQ . Пусть H — точка пересечения плоскости α и отрезка PQ . Тогда $MH \perp PQ$, то есть MH — высота в прямоугольном $\triangle QMP$, проведенная к гипотенузе. Найдем, в каком отношении точка H делит гипотенузу PQ . В прямоугольном треугольнике проекция катета на гипотенузу равна квадрату катета, деленному на гипотенузу, поэтому

$$HP = \frac{MP^2}{QP} = \frac{16}{\sqrt{41}}.$$

Проекция катета QM на гипотенузу QP — это отрезок HQ .

$$HQ = \frac{QM^2}{QP} = \frac{25}{\sqrt{41}}.$$

Искомое отношение:

$$\frac{PH}{HQ} = \frac{16/\sqrt{41}}{25/\sqrt{41}} = \frac{16}{25}.$$

Ответ: $\frac{16}{25}$.

Задача 4.6. ЕГЭ-2023, основной вариант, №13.

В основании прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит равнобедренный треугольник ABC с основанием AB . Точка P делит ребро AB в отношении $AP : PB = 1 : 3$, а точка Q — середина ребра A_1C_1 . Через середину M ребра BC провели плоскость α , перпендикулярную отрезку PQ .

а) Докажите, что плоскости α делит ребро AC пополам.

б) Найдите отношение, в котором плоскость α делит отрезок A_1C_1 , считая от точки A_1 , если известно, что $AB = AA_1$ и $AB : BC = 2 : 7$.

Ответ: 1 : 2.

4.4. Угол между плоскостями.

Пример 4.7. [105] В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ сторона основания $AB = 7\sqrt{3}$, а боковое ребро $AA_1 = 8$.

а) Докажите, что плоскость B_1CA_1 перпендикулярна плоскости, проходящей через ребро AA_1 и середину ребра B_1C_1 .

б) Найдите тангенс угла между плоскостями B_1CA_1 и BB_1C_1 .

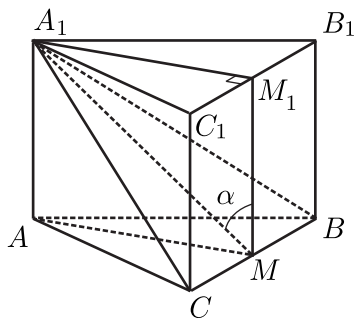


Рис. 98. К примеру 4.7.

РЕШЕНИЕ. а) Пусть M и M_1 — середины ребер BC и B_1C_1 соответственно. Плоскость, проходящая через ребро AA_1 и середину ребра B_1C_1 , — это плоскость AA_1M_1 (рис. 98).

В правильном треугольнике ABC медиана AM является и высотой, то есть $AM \perp BC$. Так как призма прямая, то $AA_1 \perp ABC$. Поскольку прямая BC перпендикулярна двум пересекающимся прямым AM и M_1M в плоскости AA_1M_1 , то $BC \perp AA_1M_1$. Так как плоскость B_1CA_1 проходит через прямую $BC \perp AA_1M_1$, то по признаку перпендикулярности плоскостей

$B_1CA_1 \perp AA_1M_1$.

б) Плоскости B_1CA_1 и BB_1C_1 пересекаются по прямой BC . $A_1M \perp BC$, так как $\triangle A_1BC$ — равнобедренный ($A_1B = A_1C$), и A_1M — медиана, а следовательно, и высота. $M_1M \perp BC$, следовательно, $\angle A_1MM_1$ — линейный угол двугранного угла между плоскостями B_1CA_1 и BB_1C_1 . Обозначим этот угол α .

Рассмотрим $\triangle A_1M_1M$. Он прямоугольный, так как $M_1M \perp A_1B_1C_1$. Его катеты: $M_1M = AA_1 = 8$, A_1M_1 — высота в правильном $\triangle A_1B_1C_1$ со стороной $7\sqrt{3}$:

$$A_1M_1 = \frac{7\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{2} = \frac{21}{2}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{A_1M_1}{M_1M} = \frac{21/2}{8} = \frac{21}{16}.$$

Ответ: б) $\frac{21}{16}$.

Задача 4.8. [105] В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ сторона основания $AB = 8\sqrt{3}$, а боковое ребро $AA_1 = 5$.

а) Найдите длину отрезка A_1K , где K — середина ребра BC .

б) Найдите тангенс угла между плоскостями B_1CA_1 и BB_1C_1 .

Ответ: а) 13; б) $\frac{12}{5}$.

Пример 4.9. ЕГЭ-2022, демонстрационный вариант, №13.

Все ребра правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ имеют длину 6. Точки M и N — середины ребер AA_1 и A_1C_1 соответственно.

а) Докажите, что прямые BM и MN перпендикулярны.

б) Найдите угол между плоскостями BMN и ABB_1 .

РЕШЕНИЕ. а) Для доказательства перпендикулярности прямых BM и MN воспользуемся теоремой, обратной теореме Пифагора, для треугольника BMN (рис. 99). Найдем квадраты длин его сторон. Точка M — середина AA_1 , поэтому $AM = 3$. В прямоугольном треугольнике $\triangle ABM$:

$$BM^2 = AB^2 + AM^2 = 6^2 + 3^2 = 45.$$

По условию N — середина A_1C_1 , тогда в прямоугольном треугольнике $\triangle A_1NM$ $A_1M = 3$, $A_1N = \frac{1}{2}A_1C_1 = 3$.

$$MN^2 = A_1M^2 + A_1N^2 = 3^2 + 3^2 = 18.$$

B_1N — медиана в равностороннем треугольнике $\triangle A_1B_1C_1$:

$$B_1N = \frac{6\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}.$$

В прямоугольном треугольнике $\triangle B_1BN$ (угол $\angle BB_1N = 90^\circ$):

$$BN^2 = BB_1^2 + B_1N^2 = 6^2 + (3\sqrt{3})^2 = 63.$$

Так как $BN^2 = BM^2 + MN^2$, то по теореме, обратной теореме Пифагора, $\triangle BMN$ является прямоугольным с прямым углом при вершине M . Следовательно, $BM \perp MN$.

б) Опустим перпендикуляр NH на ребро A_1B_1 . Так как NH еще перпендикулярно AA_1 , то $NH \perp ABB_1$, тогда MH — проекция наклонной MN на плоскость ABB_1 . Прямая BM является линией пересечения плоскостей BMN и ABB_1 . Из пункта а) мы знаем, что $MN \perp BM$. Наклонная MN перпендикулярна прямой BM в плоскости ABB_1 , а ее проекция MH также перпендикулярна BM . Следовательно, $\angle NMH$ — линейный угол двугранного угла между плоскостями BMN и ABB_1 . Обозначим этот угол α .

Найдем стороны прямоугольного $\triangle MNH$: $MN = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$ (из п. а), NH — высота $\triangle A_1NB_1$.

Так как N — середина A_1C_1 , площадь $\triangle A_1NB_1$ равна половине площади $\triangle A_1B_1C_1$.

$$S_{A_1B_1C_1} = \frac{6^2\sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3} \implies S_{A_1NB_1} = \frac{1}{2}S_{A_1B_1C_1} = \frac{9\sqrt{3}}{2}.$$

С другой стороны,

$$S_{A_1NB_1} = \frac{1}{2} \cdot A_1B_1 \cdot NH = 3 \cdot NH \implies$$

$$3 \cdot NH = \frac{9\sqrt{3}}{2} \implies NH = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

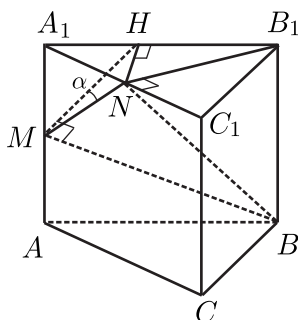


Рис. 99. К примеру 4.9.

Теперь найдем синус угла α :

$$\sin \alpha = \frac{NH}{MN} = \frac{3\sqrt{3}/2}{3\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{3}{8}}.$$

Ответ: $\arcsin \sqrt{\frac{3}{8}}$.

Задача 4.10. ЕГЭ-2023, основной вариант, №13.

Дана прямая призма, в основании которой лежит равнобедренная трапеция с основаниями $AD = 5$ и $BC = 4$. Точка M делит ребро A_1D_1 в отношении $A_1M : MD_1 = 1 : 4$, точка K — середина ребра DD_1 .

а) Доказать, что плоскость MCK параллельна прямой BD .

б) Найти тангенс угла между плоскостью MCK и плоскостью основания, если $\angle BAD = 60^\circ$, а $\angle CKM = 90^\circ$.

Ответ: $\frac{\sqrt{14}}{2}$.

Пример 4.11. [89] В правильной шестиугольной призме $ABCDEF A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ все ребра равны 1.

а) Докажите, что плоскости AA_1D_1 и DB_1F_1 перпендикулярны.

б) Найдите тангенс угла между плоскостями ABC и DB_1F_1 .

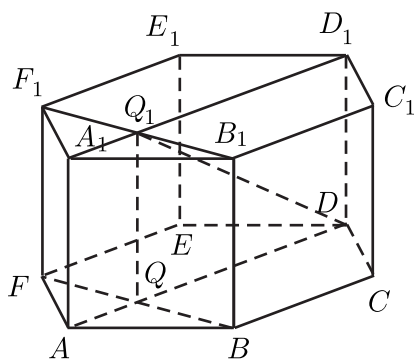


Рис. 100. К примеру 4.11.

РЕШЕНИЕ. а) Из свойств правильного шестиугольника следует, что $F_1B_1 \perp A_1D_1$. Также $F_1B_1 \perp AA_1$, так как прямая AA_1 перпендикулярна плоскости $A_1B_1C_1$, а, следовательно, любой прямой, лежащей в этой плоскости. Поэтому F_1B_1 перпендикулярна плоскости AA_1D_1 , так как она перпендикулярна двум пересекающимся прямым, лежащим в этой плоскости. Таким образом, плоскость F_1B_1D проходит через прямую F_1B_1 , перпендикулярную плоскости AA_1D_1 , следовательно, по признаку перпендикулярности

плоскостей эти плоскости перпендикулярны.

б) Точки пересечения FB и AD , F_1B_1 и A_1D_1 обозначим Q и Q_1 соответственно, $QQ_1 \parallel AA_1$. Из свойств правильного шестиугольника следует, что $FB \perp AD$, следовательно $AD \perp F_1B_1$. По теореме о трех перпендикулярах $Q_1D \perp F_1B_1$, следовательно, $\angle Q_1DQ$ — линейный угол искомого двугранного. Так как $QQ_1 = 1$, $AD = 2$, $AQ = \frac{1}{2}$, то

$$QD = \frac{3}{2}, \quad \operatorname{tg} \angle Q_1DQ = \frac{2}{3}.$$

Ответ: б) $\frac{2}{3}$.

Задача 4.12. [113] В правильной шестиугольной призме $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ все ребра равны 1. Найдите угол между плоскостями ABC и $DB_1 F_1$.

Ответ: $\operatorname{arctg} \frac{2}{3}$.

4.5. Угол между прямой и плоскостью.

Пример 4.13. [105] В основании прямой треугольной призмы $ABC A_1 B_1 C_1$ лежит равнобедренный треугольник ABC с основанием AC . Точка K — середина ребра $A_1 B_1$, а точка M делит ребро AC в отношении $AM : MC = 1 : 3$.

а) Докажите, что KM перпендикулярно AC .

б) Найдите угол между прямой KM и плоскостью ABB_1 , если $AB = 8$, $AC = 12$ и $AA_1 = 5$.

РЕШЕНИЕ. а) Проведем $B_1 L$ — высоту, медиану, биссектрису равнобедренного $\triangle A_1 B_1 C_1$ и $KM_1 \parallel BL$ — среднюю линию $\triangle A_1 B_1 L$, которая также перпендикулярна $A_1 C_1$. Плоскость $KM_1 M$ перпендикулярна $A_1 C_1$, так как она проходит через две прямые KM_1 и MM_1 , перпендикулярные $A_1 C_1$. Следовательно, $A_1 C_1$ перпендикулярна любой прямой, лежащей в плоскости, в частности, KM , то есть $KM \perp A_1 C_1$ и $KM \perp AC$.

б) Опустим перпендикуляр MH на AB , и так как $MH \perp AA_1$, то MH перпендикулярна плоскости $BB_1 A_1$. Следовательно, KH — проекция KM на плоскость $BB_1 A_1$, а $\angle MKH$ — искомый угол.

Рассмотрим прямоугольный треугольник $\triangle KMM_1$:

$$KM_1 = \frac{1}{2} B_1 L = \frac{1}{2} \sqrt{B_1 A_1^2 - A_1 L^2} = \frac{1}{2} \sqrt{8^2 - 6^2} = \sqrt{7},$$

$$KM = \sqrt{KM_1^2 + M_1 M^2} = \sqrt{7 + 25} = 4\sqrt{2}.$$

$$\text{Из } \triangle B_1 L A_1 \text{ имеем } \sin \angle B_1 A_1 L = \frac{B_1 L}{B_1 A_1} = \frac{2\sqrt{7}}{8} = \frac{\sqrt{7}}{4}.$$

Рассмотрим прямоугольный треугольник $\triangle AHM$:

$$HM = AM \sin \angle HAM = 3 \cdot \frac{\sqrt{7}}{4}.$$

Из прямоугольного треугольника $\triangle KHM$ получаем, что

$$\sin \angle MKH = \frac{HM}{KM} = \frac{3\sqrt{7}}{4 \cdot 4\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{14}}{32}.$$

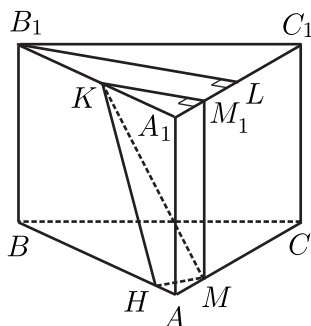


Рис. 101. К примеру 4.13.

Отсюда $\angle MKN = \arcsin \frac{3\sqrt{14}}{32}$.

Ответ: б) $\arcsin \frac{3\sqrt{14}}{32}$.

Задача 4.14. [75] Основанием прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ является равнобедренный треугольник ABC , где $AB = AC = 5$ и $BC = 8$. Высота призмы равна 3.

а) Докажите, что треугольник A_1BC остроугольный.

б) Найдите угол между прямой A_1B и плоскостью BCC_1 .

Ответ: б) $\arctg \frac{3}{5}$.

Пример 4.15. [105] В основании прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C . Точка M — середина ребра B_1C_1 , точка N лежит на ребре AC причем $AN : NC = 3 : 1$. Катет AC вдвое больше бокового ребра AA_1 призмы.

а) Докажите, что прямая MN перпендикулярна прямой CA_1 .

б) Найдите угол между прямой MN и плоскостью основания $A_1B_1C_1$, если $\sin \angle CBA = \frac{2}{\sqrt{7}}$.

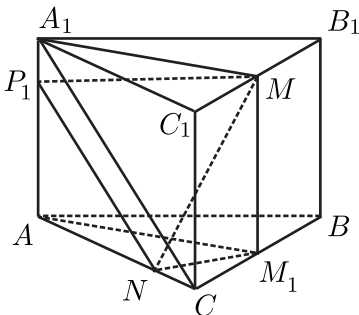


Рис. 102. К примеру 4.15.

РЕШЕНИЕ. Проведем CA_1 и через точку N прямую $NP_1 \parallel CA_1$, где $P_1 \in AA_1$ (рис. 102). По обобщенной теореме Фалеса для угла $\angle A_1AC$, так как N делит AC в отношении $3 : 1$ (считая от A), то P_1 делит AA_1 в отношении $3 : 1$. Пусть боковое ребро $AA_1 = 2x$, тогда катет $AC = 4x$. $AN = 3x$, $NC = x$. $AP_1 = \frac{3}{4}AA_1 = \frac{3x}{2}$, $P_1A_1 = \frac{1}{4}AA_1 = \frac{x}{2}$.

Докажем, что $MN \perp NP_1$, из чего будет следовать, что $MN \perp CA_1$. Для этого воспользуемся теоремой, обратной теореме Пифагора, для $\triangle P_1NM$.

Пусть $BC = 2y$, тогда $C_1M = B_1M = y$. Пусть M_1 — проекция точки M на плоскость ABC , тогда M_1 — середина BC и $CM_1 = y$.

Найдем квадраты сторон $\triangle P_1NM$:

$$\text{в } \triangle CM_1N: NM_1^2 = NC^2 + CM_1^2 = x^2 + y^2;$$

$$\text{в } \triangle MNM_1: MN^2 = MM_1^2 + NM_1^2 = 5x^2 + y^2;$$

$$\text{в } \triangle ANP_1: P_1N^2 = AN^2 + AP_1^2 = (3x)^2 + \left(\frac{3x}{2}\right)^2 = \frac{45x^2}{4};$$

$$\text{в } \triangle A_1C_1M: A_1M^2 = A_1C_1^2 + C_1M^2 = (4x)^2 + y^2 = 16x^2 + y^2;$$

$$\text{в } \triangle A_1P_1M: P_1M^2 = P_1A_1^2 + A_1M^2 = \left(\frac{x}{2}\right)^2 + (16x^2 + y^2) = \frac{65x^2}{4} + y^2.$$

Проверяем равенство $P_1M^2 = P_1N^2 + MN^2$:

$$\frac{45x^2}{4} + (5x^2 + y^2) = \frac{45x^2 + 20x^2}{4} + y^2 = \frac{65x^2}{4} + y^2.$$

Равенство выполняется, следовательно $\triangle P_1NM$ — прямоугольный, $\angle MNP_1 = 90^\circ$. Значит $MN \perp NP_1$, а так как $NP_1 \parallel CA_1$, то $MN \perp CA_1$.

б) Угол между прямой MN и плоскостью основания ABC — это угол между прямой MN и ее проекцией NM_1 на эту плоскость, то есть $\angle MNM_1$.

$$\operatorname{tg} \angle MNM_1 = \frac{MM_1}{NM_1}.$$

Из $\triangle ABC$:

$$AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{(4x)^2 + (2y)^2} = 2\sqrt{4x^2 + y^2}.$$

Отсюда

$$\sin \angle CBA = \frac{AC}{AB} = \frac{4x}{2\sqrt{4x^2 + y^2}} = \frac{2}{\sqrt{7}} \Rightarrow$$

$$\sqrt{7}x = \sqrt{4x^2 + y^2} \Rightarrow y^2 = 3x^2.$$

Тогда $NM_1^2 = x^2 + y^2 = 4x^2 \Rightarrow NM_1 = 2x$.

$$\operatorname{tg} \angle MNM_1 = \frac{2x}{2x} = 1.$$

Следовательно, $\angle MNM_1 = 45^\circ$.

Ответ: б) 45° .

Задача 4.16. [114] В основании прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C . Точка M — середина ребра B_1C_1 , точка N лежит на ребре AC , причем $AN : NC = 8 : 1$. Катет AC вдвое больше бокового ребра AA_1 призмы.

а) Докажите, что прямая MN перпендикулярна прямой CA_1 .

б) Найдите угол между прямой MN и плоскостью основания $A_1B_1C_1$, если $\sin \angle CBA = \frac{3}{5}$.

Ответ: $\arctg \frac{3\sqrt{37}}{37}$.

4.6. Расстояние от точки до плоскости.

Пример 4.17. [89] Основанием прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ является равнобедренный треугольник ABC , в котором $AB = BC = 10$, $AC = 16$. Боковое ребро призмы равно 24. Точка P — середина ребра BB_1 .

а) Найдите тангенс угла между плоскостями $A_1B_1C_1$ и ACP .

б) Найдите расстояние от точки B до плоскости PAC .

РЕШЕНИЕ. а) Плоскость $A_1B_1C_1$ параллельна плоскости основания ABC . Угол между плоскостями $A_1B_1C_1$ и ACP равен углу между плоскостями ABC и ACP (рис. 103).

Пусть BM — высота в равнобедренном $\triangle ABC$, проведенная к основанию AC . Тогда M — середина AC и $AM = MC = 8$. Из прямоугольного $\triangle ABM$:

$$BM = \sqrt{AB^2 - AM^2} = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6.$$

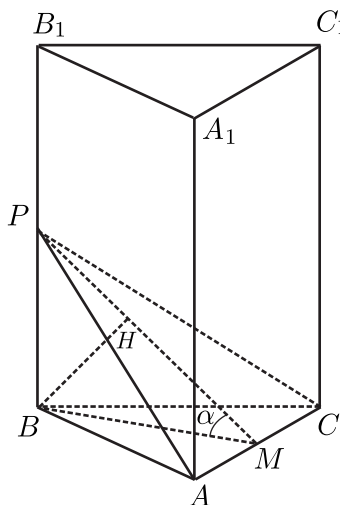


Рис. 103. К примеру 4.17.

BH в прямоугольном треугольнике PBM .

Площадь $\triangle BPM$ равна

$$S_{\triangle BPM} = \frac{1}{2} \cdot PB \cdot BM = \frac{1}{2} \cdot BH \cdot PM \iff$$

$$12 \cdot 6 = \sqrt{PB^2 + BM^2} \cdot BH \iff BH = \frac{12\sqrt{5}}{5}.$$

Ответ: а) 2; б) $\frac{12\sqrt{5}}{5}$.

Задача 4.18. [75] Основанием прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ является равнобедренный треугольник ABC , $AB = AC = 5$, $BC = 6$. Высота призмы равна 3.

а) Докажите, что плоскость, проходящая через точки A , A_1 и середину ребра B_1C_1 , перпендикулярна плоскости A_1BC .

б) Найдите расстояние от середины ребра B_1C_1 до плоскости B_1CA_1 .

Ответ: б) 2, 4.

Так как призма прямая, $BB_1 \perp ABC$, значит $PB \perp BM$. Линия пересечения плоскостей — прямая AC . Так как $BM \perp AC$ и $PM \perp AC$ (по теореме о трех перпендикулярах), то линейным углом двугранного угла является $\angle PMB$. Обозначим его α . В прямоугольном треугольнике $\triangle PBM$: $PB = \frac{1}{2}BB_1 = \frac{24}{2} = 12$, $BM = 6$.

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{PB}{BM} = \frac{12}{6} = 2.$$

б) Так как $AC \perp BM$ и $AC \perp PB$, то AC перпендикулярна плоскости PBM . Прямая PM — линия пересечения перпендикулярных плоскостей PAC и PBM . Искомое расстояние от точки B до плоскости PAC — это длина перпендикуляра, опущенного из точки B на прямую PM , то есть высота

4.7. Расстояние от точки до прямой.

Пример 4.19. [75] В правильной шестиугольной призме $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$, все ребра равны 1.

- Докажите, что точки D_1 , E и F_1 лежат на сфере с центром в точке B .
- Найдите расстояние от точки B до прямой $F_1 E_1$.

РЕШЕНИЕ. а) Найдем расстояния от точки B до точек D_1, E, F_1 (рис. 104). В основании $ABCDEF$ $BE = 2$, $BF = \sqrt{3}$. Из прямоуголь-

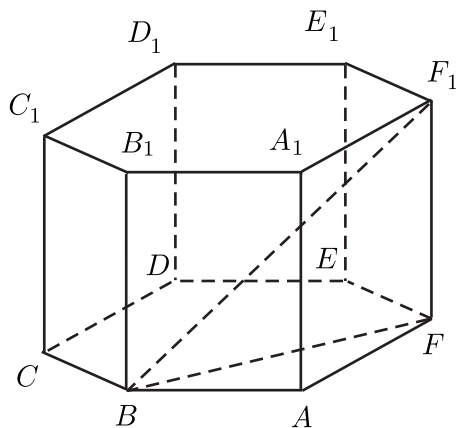


Рис. 104. К примеру 4.19.

ных треугольников $\triangle BFF_1$ и $\triangle BDD_1$ $BF_1 = 2$, $BD_1 = 2$. Поскольку $BE = BF_1 = BD_1 = 2$, то точки E, F_1, D_1 лежат на сфере с центром в точке B и радиуса 2.

б) В правильном шестиугольнике $BF \perp EF$. Так как призма прямая, боковое ребро FF_1 перпендикулярно основанию, значит $BF \perp FF_1$. Следовательно, $BF \perp EFF_1$. Тогда BF — перпендикуляр к плоскости EFF_1 , BF_1 — наклонная, а FF_1 — ее проекция на эту плоскость. По теореме о трех перпендикулярах, так как $E_1 F_1$ перпендикулярна проекции FF_1 , она перпендикулярна и самой наклонной BF_1 . Следовательно, $E_1 F_1 \perp BF_1$. Значит, BF_1 — искомое расстояние от точки B до прямой $E_1 F_1$. В пункте а) мы нашли $BF_1 = 2$.

Ответ: б) 2.

Задача 4.20. [113] В правильной шестиугольной призме $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки B до прямой $A_1 F_1$.

Ответ: $\frac{\sqrt{7}}{2}$.

Пример 4.21. [75] В правильной треугольной призме $ABCA_1 B_1 C_1$ высота равна 2, сторона основания равна 1.

а) Докажите, что точки A_1 и B равноудалены от плоскости AB_1C_1 .

б) Найдите расстояние от точки B_1 до прямой AC_1 .

РЕШЕНИЕ. а) Пусть M и M_1 — середины ребер BC и B_1C_1 соответственно (рис. 105). Расстояние от точки A_1 до плоскости AB_1C_1 равно высоте треугольника $\triangle A_1M_1A$, проведенной из точки A . Действительно, $B_1C_1 \perp A_1M_1$ и $B_1C_1 \perp A_1A$, следовательно $B_1C_1 \perp AA_1M_1$. Значит, B_1C_1 перпендикулярна высоте $\triangle A_1M_1A$. Высота перпендикулярна M_1A по построению. Прямая $BC \parallel B_1C_1$, значит BC параллельна плоскости AB_1C_1 . Следовательно, расстояние от любой точки прямой BC , в том числе от точки B , до плоскости AB_1C_1 одинаково. Поскольку $\triangle ABM_1 = \triangle B A_1 M$ (по трем сторонам), тогда их высоты, проведенные к общей стороне A_1M , равны, а эти высоты и являются искомыми расстояниями.

б) Расстояние от точки B_1 до прямой AC_1 равно высоте B_1H , проведенной в треугольнике AC_1B_1 . Найдём эту высоту через площадь треугольника AC_1B_1 .

В прямоугольном треугольнике $\triangle ACC_1$

$$AC_1 = \sqrt{AC^2 + CC_1^2} = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}.$$

В прямоугольном треугольнике $\triangle ABB_1$

$$AB_1 = \sqrt{AB^2 + BB_1^2} = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}.$$

Найдём площадь равнобедренного треугольника AC_1B_1 с основанием B_1C_1 . В правильном треугольнике $A_1B_1C_1$ высота $A_1M_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Длину AM_1 найдём из прямоугольного треугольника $\triangle AA_1M_1$:

$$AM_1 = \sqrt{AA_1^2 + A_1M_1^2} = \frac{\sqrt{19}}{2}.$$

Рис. 105. К примеру 4.21.

Тогда площадь треугольника равна

$$S_{AC_1B_1} = \frac{1}{2} \cdot B_1C_1 \cdot AM_1 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{19}}{2} = \frac{\sqrt{19}}{4}.$$

С другой стороны площадь также можно выразить через сторону AC_1 и искомую высоту B_1H :

$$S_{AC_1B_1} = \frac{1}{2} \cdot AC_1 \cdot B_1H = \frac{\sqrt{19}}{4}.$$

Тогда

$$\frac{1}{2} \cdot \sqrt{5} \cdot B_1H = \frac{\sqrt{19}}{4} \implies B_1H = \frac{\sqrt{95}}{10}.$$

Ответ: б) $\frac{\sqrt{95}}{10}$.

Задача 4.22. [75] В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ высота равна 3, а ребро основания равно 4.

а) Докажите, что точки A и B_1 равноудалены от плоскости BA_1C_1 .

б) Найдите расстояние от точки A_1 до прямой BC_1 .

Ответ: б) $\frac{4\sqrt{21}}{5}$.

Пример 4.23. [75] В правильной шестиугольной призме $ABCDEF A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ стороны основания равны 3, а боковые ребра равны 4.

а) Докажите, что плоскости CD_1E_1 и AEE_1 перпендикулярны.

б) Найдите расстояние от точки C до прямой D_1E_1 .

РЕШЕНИЕ. а) Построим сечение призмы плоскостью CD_1E_1 . Поскольку $D_1E_1 \parallel ABC$, то плоскость сечения пересекает нижнее основание по прямой FC , параллельной E_1D_1 (рис. 106).

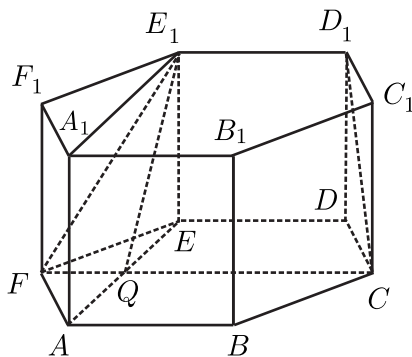


Рис. 106. К примеру 4.23.

Из свойств правильного шестиугольника $FC \parallel ED$, следовательно, $FC \parallel E_1D_1$. Соединяя точки F и E_1 , завершаем построение сечения. Также из свойств правильного шестиугольника $FC \perp AE$. Так как призма прямая, $AA_1 \perp FC$, следовательно, $FC \perp AEE_1$. В силу того, что плоскость CD_1E_1 содержит прямую FC , перпендикулярную плоскости AEE_1 , то по признаку перпендикулярности плоскостей $CD_1E_1 \perp AEE_1$.

б) $FC \parallel E_1D_1$, поэтому расстояние от любой точки прямой FC до прямой E_1D_1 одинаково.

Найдем расстояние от точки Q (точка пересечения FC и AE) до E_1D_1 . В пункте а) мы доказали, что $FC \perp AEE_1$, а так как $E_1D_1 \parallel FC$, то $E_1D_1 \perp AEE_1$. Следовательно, $E_1D_1 \perp QE_1$ лежащей в плоскости AEE_1 . Значит, QE_1 — искомое расстояние.

В правильном шестиугольнике $AE = 3\sqrt{3}$, $AE \perp FC$ и делится точкой пересечения с прямой FC пополам. Таким образом,

$$QE = \frac{AE}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Рассмотрим прямоугольный $\triangle QEE_1$:

$$QE_1 = \sqrt{QE^2 + EE_1^2} = \sqrt{\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2 + 4^2} = \frac{\sqrt{91}}{2}.$$

Ответ: б) $\frac{\sqrt{91}}{2}$.

Задача 4.24. [75] В правильной шестиугольной призме $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ стороны основания равны 4, а боковые ребра равны 3.

а) Докажите, что плоскости $BC_1 D_1$ и FDD_1 перпендикулярны.

б) Найдите расстояние от точки B до прямой $C_1 D_1$.

Ответ: б) $\sqrt{21}$.

4.8. Углы и расстояния между прямыми в пространстве.

Пример 4.25. [75, 89] В правильной треугольной призме $ABCA_1 B_1 C_1$ все ребра равны 1.

а) Докажите, что прямая AB_1 параллельна прямой, проходящей через середины отрезков AC и BC_1 .

б) Найдите косинус угла между прямыми AB_1 и BC_1 .

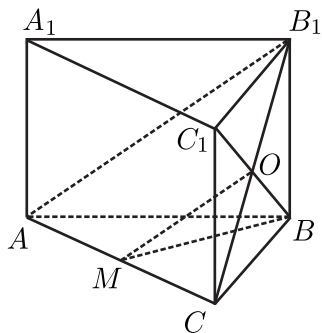


Рис. 107. К примеру 4.25.

РЕШЕНИЕ.

а) Рассмотрим треугольник AB_1C . Пусть точка M — середина стороны AC , а точка O — середина стороны BC_1 (рис. 107).

Следовательно, отрезок MO является средней линией треугольника AB_1C , $MO = \frac{1}{2} AB_1$ и $MO \parallel AB_1$.

б) Угол между скрещивающимися прямыми AB_1 и BC_1 равен углу между прямой $MO \parallel AB_1$ и прямой BC_1 . Так как эти прямые пересекаются в точке O , искомый угол равен $\angle MOB$. Найдем его из треугольника $\triangle MOB$, для этого вычислим длины его сторон.

В прямоугольном треугольнике $\triangle AA_1B_1$

$$AB_1 = \sqrt{AA_1^2 + A_1B_1^2} = \sqrt{2}.$$

Из пункта а) следует, что $MO = \frac{1}{2}AB_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Грань BCC_1B_1 — квадрат со стороной 1, BC_1 — его диагональ, $BC_1 = \sqrt{2}$, $BO = \frac{1}{2}BC_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$. В $\triangle ABC$ точка M — середина AC , $MB = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Теперь применим теорему косинусов к $\triangle MOB$:

$$\cos \angle MOB = \frac{MO^2 + BO^2 - MB^2}{2 \cdot MO \cdot BO} = \frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \frac{3}{4}}{2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{1}{4}.$$

Ответ: б) $\frac{1}{4}$.

Задача 4.26. [75] Сторона основания правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равна 8. Высота этой призмы равна 6.

а) Докажите, что плоскость, содержащая прямую AB_1 и параллельная прямой CA_1 , проходит через середину ребра BC .

б) Найдите угол между прямыми AB_1 и CA_1 .

Ответ: $2 \arcsin \frac{2\sqrt{3}}{5}$ или $\arccos \frac{1}{25}$.

Пример 4.27. [75] Дана правильная шестиугольная призма $ABCDEF A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ все ребра которой равны 1.

а) Докажите, что $AC_1 \perp BE$.

б) Найдите косинус угла между прямыми AB_1 и BC_1 .

РЕШЕНИЕ. а) Проекцией прямой AC_1 на плоскость основания ABC будет прямая AC . В правильном шестиугольнике диагонали AC и BE перпендикулярны, следовательно, по теореме о трех перпендикулярах $AC_1 \perp BE$ (рис. 108). б) Построим снизу такую же шестиугольную призму (рис. 108). Угол между скрещивающимися прямыми AB_1 и BC_1 равен углу между прямыми $A_2B \parallel AB_1$ и BC_1 , а этот угол можно определить из $\triangle A_2BC_1$ по теореме косинусов. Из свойств правильного шестиугольника $A_2C_2 = \sqrt{3}$. Из прямоугольного треугольника $\triangle A_2C_1C_2$ по теореме Пифагора получаем

$$A_2C_1^2 = A_2C_2^2 + C_2C_1^2 = 3 + 4 = 7.$$

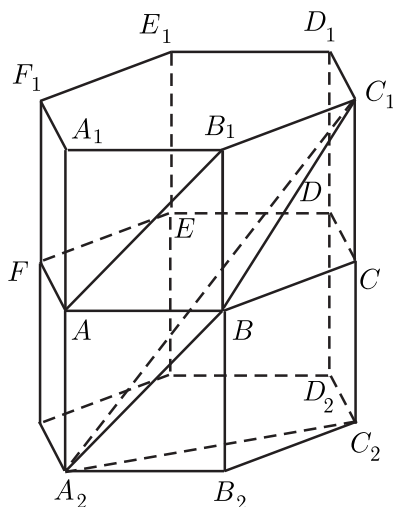


Рис. 108. К примеру 4.27.

Далее по теореме косинусов для $\triangle A_2BC_1$

$$\cos \angle A_2BC_1 = \frac{A_2B^2 + BC_1^2 - A_2C_1^2}{2A_2B \cdot BC_1} = \frac{2 + 2 - 7}{2 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = -\frac{3}{4}.$$

Поскольку угол между скрещивающимися прямыми берется острым, косинус искомого угла равен $\frac{3}{4}$.

Ответ: 0,75.

Задача 4.28. [75] Дана правильная шестиугольная призма $ABCDEF A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ все ребра которой равны 1.

а) Докажите, что $AC_1 \perp BE$.

б) Найдите косинус угла между прямыми AB_1 и BD_1 .

Ответ: $\frac{\sqrt{2}}{4}$.

Пример 4.29. [75] ЕГЭ-2017, основная волна, №14.

Основанием прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ является прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C . Прямые CA_1 и AB_1 перпендикулярны.

а) Докажите, что $AA_1 = AC$.

б) Найдите расстояние между прямыми CA_1 и AB_1 , если $AC = 6$, $BC = 3$.

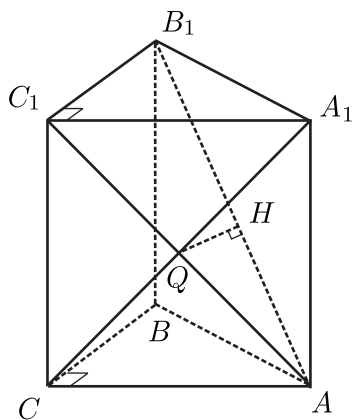


Рис. 109. К примеру 4.29.

РЕШЕНИЕ. а) Так как призма прямая, то $CC_1 \perp A_1B_1C_1$, и, следовательно, $CC_1 \perp B_1C_1$ (рис. 109). В треугольнике $A_1B_1C_1$ угол $\angle C_1 = 90^\circ$, значит $A_1C_1 \perp B_1C_1$. Отсюда $B_1C_1 \perp ACC_1$.

Прямая AC_1 является проекцией наклонной AB_1 на плоскость ACC_1 . По условию, прямая CA_1 перпендикулярна наклонной AB_1 . По теореме, обратной теореме о трех перпендикулярах, $CA_1 \perp A_1C$. Грань ACC_1A_1 — прямоугольник, диагонали которого (CA_1 и AC_1) взаимно перпендикулярны. Это означает, что данный прямоугольник является квадратом, $AA_1 = AC$.

б) Расстояние между скрещивающимися прямыми — это длина их общего

перпендикуляра. Из пункта а) следует, что грань ACC_1A_1 — квадрат со стороной $AC = AA_1 = 6$. Пусть Q — точка пересечения диагоналей этого квадрата ACC_1A_1 . Прямая A_1C перпендикулярна плоскости AB_1C_1 (так как $A_1C \perp AB_1$ по условию, и $A_1C \perp B_1C_1$, так как $B_1C_1 \perp$ плоскости ACC_1). Опустим из точки Q , лежащей на прямой A_1C , перпендикуляр QH на прямую AB_1 . Точка Q лежит на прямой AC_1 , точка H принадлежит прямой AB_1 , поэтому QH принадлежит плос-

кости AB_1C_1 . Так как прямая A_1C перпендикулярна этой плоскости, то $QH \perp A_1C$. Таким образом, QH — общий перпендикуляр к прямым A_1C и AB_1 , и его длина — искомое расстояние.

Рассмотрим подобные треугольники $\triangle QAH$ и $\triangle B_1AC_1$:

$$\frac{QH}{C_1B_1} = \frac{QA}{B_1A} \implies QH = \frac{QA \cdot C_1B_1}{B_1A}.$$

Здесь $C_1B_1 = CB = 3$; $AC_1 = 6\sqrt{2}$; $QA = \frac{1}{2}AC_1 = 3\sqrt{2}$.

В треугольнике $\triangle AC_1B_1$ найдем сторону AB_1 . По теореме Пифагора для треугольника $\triangle ACB$:

$$AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{6^2 + 3^2} = \sqrt{45}.$$

Для треугольника $\triangle AA_1B$: $AB_1 = \sqrt{AA_1^2 + AB^2} = \sqrt{6^2 + 45} = 9$. Тогда

$$QH = \frac{3\sqrt{2} \cdot 3}{9} = \sqrt{2}.$$

Ответ: б) $\sqrt{2}$.

Задача 4.30. [75] Основанием прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ является прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C . Грань ACC_1A_1 является квадратом.

а) Докажите, что прямые CA_1 и AB_1 перпендикулярны.

б) Найдите расстояние между прямыми CA_1 и AB_1 , если $AC = 4$, $BC = 7$.

Ответ: б) $\frac{14\sqrt{2}}{9}$.

Пример 4.31. [1] МГУ, физический ф-т, 1998 (июль), №8(8).

В правильной треугольной призме $BCDB_1C_1D_1$ ($BB_1 \parallel CC_1 \parallel DD_1$) угол между прямыми BC_1 и B_1D равен α , $BB_1 = 2$. Найдите BC .

РЕШЕНИЕ. Построим правильную треугольную призму до прямого параллелепипеда. Угол между прямыми BC и B_1D будет равен $\angle B_1DE$, так как $DE \parallel BC$ (рис. 110). Пусть сторона основания призмы равна x . В прямоугольном треугольнике $\triangle BB_1D$:

$$B_1D = \sqrt{BB_1^2 + BD^2} = \sqrt{4 + x^2}.$$

Рассмотрим $\triangle B_1D_1O_1$, где O_1 — середина C_1D_1 , B_1O_1 — медиана и высота $\triangle B_1C_1D_1$:

$$B_1O_1 = \frac{x\sqrt{3}}{2}.$$

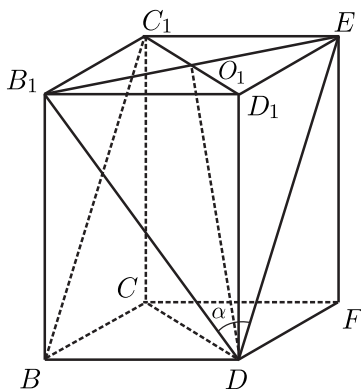


Рис. 110. К примеру 4.31.

Из $\triangle B_1DO_1$ $B_1O_1 = B_1D \sin \frac{\alpha}{2}$. Отсюда

$$\sqrt{4+x^2} \sin \frac{\alpha}{2} = \frac{x\sqrt{3}}{2}.$$

Возведем обе части уравнения в квадрат:

$$(4+x^2) \sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{3x^2}{4} \iff$$

$$4 \sin^2 \frac{\alpha}{2} = x^2 \left(\frac{3}{4} - \sin^2 \frac{\alpha}{2} \right) \implies x^2 = \frac{4 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\frac{3}{4} - \sin^2 \frac{\alpha}{2}}.$$

Используя формулу $\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{2}$, получаем

$$x^2 = \frac{4 \left(\frac{1 - \cos \alpha}{2} \right)}{\frac{3}{4} - \frac{1 - \cos \alpha}{2}} = \frac{2(1 - \cos \alpha)}{\frac{3}{4} - 2(1 - \cos \alpha)} = \frac{8(1 - \cos \alpha)}{3 - 2 + 2 \cos \alpha} = \frac{8(1 - \cos \alpha)}{1 + 2 \cos \alpha}$$

$$\implies x = \sqrt{\frac{8(1 - \cos \alpha)}{1 + 2 \cos \alpha}}.$$

Ответ: $\sqrt{\frac{8(1 - \cos \alpha)}{1 + 2 \cos \alpha}}.$

Задача 4.32. [1] МГУ, физический ф-т, 1998 (июль), №8(8).

В основании правильной треугольной призмы $KLMK_1L_1M_1$ ($KK_1 \parallel LL_1 \parallel MM_1$) угол между прямыми KM_1 и L_1M равен α , $KL = 2$. Найдите MM_1 .

Ответ: $\sqrt{\frac{2(1 + 2 \cos \alpha)}{1 - \cos \alpha}}.$

Пример 4.33. ЕГЭ-2021, резервный день, №14.

В основании правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит $\triangle ABC$. На прямой AA_1 отмечена точка D так, что точка A_1 — середина отрезка AD . На прямой B_1C_1 отмечена точка E так, что C_1 — середина отрезка B_1E .

а) Докажите, что прямые A_1B_1 и DE перпендикулярны.

б) Найдите расстояние между прямыми AB и DE , если $AB = 3$, $AA_1 = 1$.

РЕШЕНИЕ. а) По условию в $\triangle A_1EB_1$ медиана A_1C_1 равна половине стороны, к которой она проведена, следовательно, треугольник $\triangle B_1A_1E$ прямоугольный, $\angle B_1A_1E = 90^\circ$. (рис. 111). Докажем это. Треугольники $\triangle A_1C_1E$ и $\triangle A_1C_1B_1$ равнобедренные. Сумма углов $\triangle A_1EB_1$ равна $2\alpha + 2\beta = 180^\circ$. Следовательно, $\alpha + \beta = 90^\circ$. (Эта задача рассмотрена в «Планиметрия. Часть 1.», раздел «Прямоугольные треугольники».)

$DA_1 \perp A_1B_1C_1$, DE — наклонная, A_1E — ее проекция. $A_1B_1 \perp A_1E$, следовательно, по теореме о трех перпендикулярах $A_1B_1 \perp DE$.

б) Продлим BC за точку C на расстояние, равное BC . Получим точку K . $AB \perp ADE$, так как $AB \perp A_1A$, $AB \perp A_1E$ (из п. а)). Следовательно, AB перпендикулярно любой прямой в плоскости ADE . Проведем $AH \perp DE$, AH будет общим перпендикуляром к AB и DE , так как $AH \in ADE$, а AB перпендикулярно любой прямой, принадлежащей плоскости ADE . Рассмотрим $\triangle ABK$,

$$AK = \sqrt{BK^2 - AB^2} = \sqrt{36 - 9} = 3\sqrt{3}.$$

Из прямоугольного треугольника $\triangle AEK$

$$AE = \sqrt{AK^2 + EK^2} = \sqrt{27 + 1^2} = 2\sqrt{7}.$$

$\triangle ADE$ равнобедренный, так как EA_1 — медиана и высота одновременно.

$$S_{\triangle ADE} = \frac{1}{2}AD \cdot A_1E = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3\sqrt{3} = 3\sqrt{3}.$$

С другой стороны

$$S_{\triangle ADE} = \frac{1}{2}AH \cdot DE = \frac{1}{2}AH \cdot 2\sqrt{7} = 3\sqrt{3}.$$

$$\text{Следовательно, } AH = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{7}} = \frac{3\sqrt{21}}{7}.$$

$$\text{Ответ: б) } \frac{3\sqrt{21}}{7}.$$

Задача 4.34. ЕГЭ-2021, резервный день, №14.

В основании правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит треугольник ABC . На прямой AA_1 отмечена точка D так, что A_1 — середина AD . На прямой B_1C_1 отмечена точка E так, что C_1 — середина B_1E .

а) Докажите, что прямые A_1B_1 и DE перпендикулярны.

б) Найдите расстояние между прямыми AB и DE , если $AB = 4$, а $AA_1 = 1$.

$$\text{Ответ: б) } \frac{8\sqrt{3}}{7}.$$

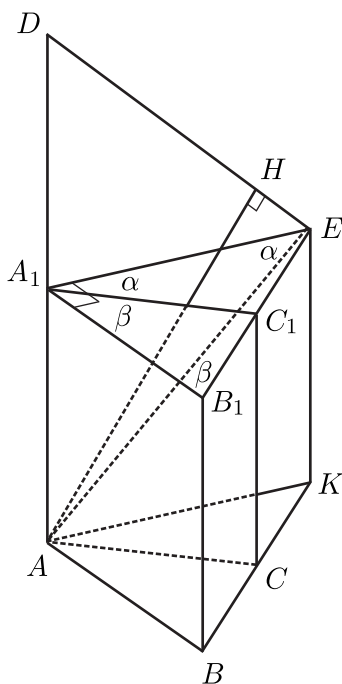


Рис. 111. К примеру 4.33.

Пример 4.35. МГУ, ДВИ, 2014, №7(8).

В основании прямой призмы лежит правильный треугольник со стороной 1. Высота призмы равна $\sqrt{2}$. Найдите расстояние между скрещивающимися диагоналями боковых граней.

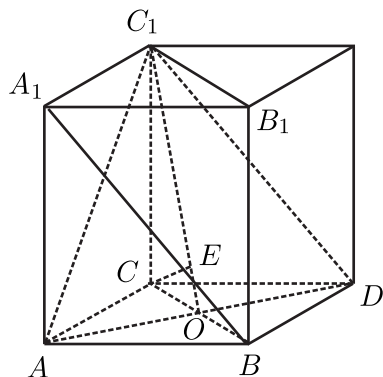


Рис. 112. К примеру 4.35.

РЕШЕНИЕ. Пусть дана призма $ABCA_1B_1C_1$. Рассмотрим скрещивающиеся диагонали боковых граней, например, A_1B и AC_1 . Для нахождения расстояния между ними построим плоскость, проходящую через одну из прямых параллельно другой. Построим основание до ромба $ACBD$. Тогда призма дорабатывается до прямой призмы с ромбом в основании $ACBDA_1C_1B_1D_1$ (рис. 112). В этой призме $A_1B \parallel C_1D$. Следовательно, $A_1B \parallel$ плоскости AC_1D .

Расстояние между прямыми A_1B и AC_1 равно расстоянию от любой точки прямой A_1B до плоскости AC_1D . Из соображений симметрии расстояние от точки B до плоскости AC_1D равно расстоянию от точки C до этой же плоскости. Найдём его.

Пусть O — точка пересечения диагоналей ромба AB и CD , $CD \perp AB$. Так как $CC_1 \perp ABC$, то $CC_1 \perp CD$. Плоскость AC_1D содержит прямую AD , которая перпендикулярна плоскости CC_1D (так как $AD \perp CD$ и $AD \perp CC_1$). Следовательно, плоскость AC_1D перпендикулярна плоскости CC_1D , и линия их пересечения — прямая C_1D . Расстояние от точки C до плоскости AC_1D равно длине высоты CE прямоугольного треугольника CC_1O .

$$\text{Найдём } C_1O: C_1O = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{3}{2}.$$

Найдём высоту CE . С одной стороны,

$$S_{\triangle CC_1O} = \frac{1}{2} \cdot CO \cdot CC_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

С другой стороны,

$$S_{\triangle CC_1O} = \frac{1}{2} \cdot C_1O \cdot CE = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot CE = \frac{3}{4}CE.$$

Тогда

$$\frac{3}{4}CE = \frac{\sqrt{2}}{4} \Rightarrow CE = \frac{\sqrt{2}}{3}.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{2}}{3}$.

Задача 4.36. МГУ, ДВИ, 2014, №7(8).

В основании прямой призмы лежит квадрат со стороной 1. Высота призмы равна $\sqrt{7}$. Найдите расстояние между большой диагональю призмы и скрещивающейся с ней диагональю боковой грани.

Ответ: $\frac{\sqrt{7}}{6}$.

Пример 4.37. [75] В правильной шестиугольной призме $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ все ребра равны 1.

- Докажите, что точки F и C равноудалены от плоскости BED_1 .
- Найдите расстояние между прямыми ED_1 и FE_1 .

РЕШЕНИЕ. а) Так как плоскости оснований ABC и $A_1 B_1 C_1$ параллельны, то сечение BED_1 должно пересекать их по параллельным прямым (рис. 113). Поскольку $D_1 C_1 \parallel BE$ (свойства правильного шестиугольника), сечение проходит через точки B, E, D_1, C_1 . Сечение $BED_1 C_1$ представляет собой равнобедренную трапецию. Проведем в ней высоты $D_1 P_2$ и $C_1 P_1$. По теореме о трех перпендикулярах, их проекции DP_2 и CP_1 будут высотами в трапеции $EDCB$.

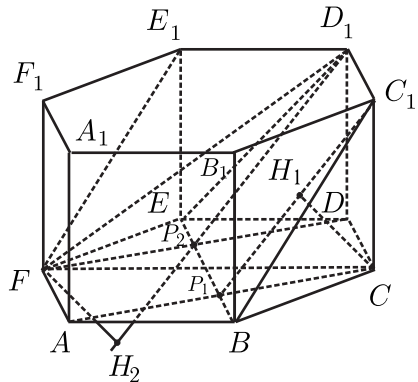


Рис. 113. К примеру 4.37.

Расстояние от точки C до плоскости сечения — это высота CH_1 в $\triangle C_1 P_1 C$. Аналогично, расстояние от точки F до плоскости сечения — это высота FH_2 в $\triangle F P_2 D_1$. Так как шестиугольник $ABCDEF$ правильный, то $CP_1 = FP_2$. Рассмотрим $\triangle C P_1 H_1$ и $\triangle F P_2 H_2$. Они равны по гипотенузе и острому углу. Следовательно, их катеты равны: $CH_1 = FH_2$. Это означает, что точки F и C равноудалены от плоскости BED_1 .

б) Так как плоскость сечения $BED_1 C_1$ проходит через прямую BC_1 , которая параллельна FE_1 ($FE_1 CB$ — параллелограмм), то плоскость сечения параллельна прямой FE_1 . Следовательно, расстояние между скрещивающимися прямыми FE_1 и ED_1 равно расстоянию от любой точки прямой FE_1 (например, от F) до плоскости сечения BED_1 . Поскольку точки F и C равноудалены от плоскости $BED_1 C_1$, найдем расстояние от точки C до этой плоскости, которое равно длине отрезка CH_1 .

Это расстояние мы обозначили как CH_1 в пункте а).

Найдем высоту CH_1 из прямоугольного треугольника $C_1 P_1 C$, вычислив его площадь двумя способами.

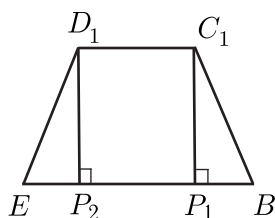


Рис. 114. К примеру 4.37.

В равнобедренной трапеции BED_1C_1 : $BE = 2$ (большая диагональ шестиугольника), $D_1C_1 = 1$ (рис. 114). Боковые стороны $ED_1 = BC_1 = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$,

$$EP_2 = \frac{BE - D_1C_1}{2} = \frac{2 - 1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Из $\triangle ED_1P_2$

$$D_1P_2 = \sqrt{ED_1^2 - EP_2^2} = \sqrt{(\sqrt{2})^2 - (1/2)^2} = \frac{\sqrt{7}}{2}.$$

В $\triangle C_1P_1C$ $CC_1 = 1$

$$C_1P_1 = \sqrt{CP_1^2 + CC_1^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + 1^2} = \frac{\sqrt{7}}{2}.$$

Площадь $\triangle C_1P_1C$:

$$S = \frac{1}{2} \cdot CP_1 \cdot CC_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 1 = \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

С другой стороны:

$$S = \frac{1}{2} \cdot C_1P_1 \cdot CH_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{7}}{2} \cdot CH_1.$$

Приравниваем площади:

$$\frac{\sqrt{7}}{4} CH_1 = \frac{\sqrt{3}}{4} \Rightarrow CH_1 = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{21}}{7}.$$

Ответ: б) $\frac{\sqrt{21}}{7}$.

Задача 4.38. [75] В основании прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит равнобедренный треугольник ABC , в котором $AB = BC$ и $AC = 16$. На ребре BB_1 выбрана точка F так, что $BF : B_1F = 3 : 5$. Угол между плоскостями AA_1C и AFC равен 45° .

а) Докажите, что расстояние между прямыми AB и A_1C_1 равно боковому ребру призмы.

б) Найдите расстояние между прямыми AB и A_1C_1 , если $FC = 10$.

Ответ: б) $8\sqrt{2}$.

4.9. Объем и площадь поверхности.

Пример 4.39. [18] Основанием прямой призмы служит равнобедренный треугольник, основание которого равно a , а угол при нем равен 45° . Определите объем призмы, если ее боковая поверхность равна сумме площадей оснований.

РЕШЕНИЕ. Поскольку в основании призмы лежит равнобедренный треугольник с углом 45° , то он прямоугольный с гипотенузой a и боковыми сторонами $\frac{a}{\sqrt{2}}$ (рис. 115). Отсюда следует, что сумма площадей оснований $\frac{a^2}{2}$. Пусть высота призмы равна h , тогда площадь боковой поверхности

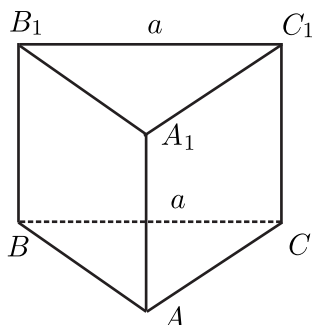


Рис. 115. К примеру 4.39.

$$S_{\text{бок}} = P_{\text{осн}} h = \left(\frac{2a}{\sqrt{2}} + a \right) h = ah (\sqrt{2} + 1).$$

Таким образом, получаем уравнение

$$\frac{a^2}{2} = ah (\sqrt{2} + 1) \iff h = \frac{a (\sqrt{2} - 1)}{2}.$$

Следовательно, объем призмы равен $\frac{a^3 (\sqrt{2} - 1)}{8}$.

Ответ: $\frac{a^3 (\sqrt{2} - 1)}{8}$.

Задача 4.40. [18] В основании прямой призмы лежит трапеция. Выразите объем призмы через площади S_1 и S_2 параллельных боковых граней и расстояние h между ними.

Ответ: $0,5(S_1 + S_2)h$.

Задача 4.41. [18] В правильной треугольной призме через сторону нижнего основания и противоположную вершину верхнего основания проведена плоскость, составляющая с плоскостью нижнего основания угол 45° . Площадь сечения равна S . Найдите объем призмы.

Ответ: $\frac{S\sqrt{3}\sqrt[4]{6}}{2}$.

Пример 4.42. [18] В правильной треугольной призме площадь сечения, проходящего через боковое ребро перпендикулярно противоположающей боковой грани, равна Q . Сторона основания призмы равна a . Найдите полную поверхность призмы.

РЕШЕНИЕ. Сечение BB_1M_1M перпендикулярно боковой грани, если BM — высота в равностороннем $\triangle ABC$ (рис. 116), $BM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Пусть $BB_1 = h$. Тогда площадь сечения

$$Q = h \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \implies h = \frac{2Q}{a\sqrt{3}}.$$

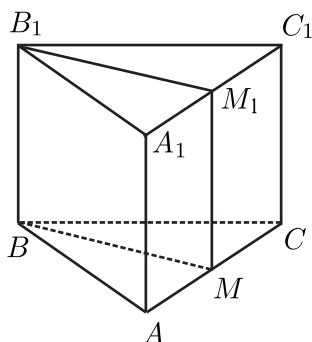


Рис. 116. К примеру 4.42.

Полная поверхность призмы состоит из трех одинаковых прямоугольников (боковых граней) и двух равносторонних треугольников (оснований):

$$S = 3ah + 2\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 2\sqrt{3}Q + \frac{a^2\sqrt{3}}{2}.$$

Ответ: $\sqrt{3} \left(2Q + \frac{a^2}{2} \right)$.

Задача 4.43. [18] Основанием прямой призмы служит равнобедренная трапеция $ABCD$: $AB = CD = 13$ см, $BC = 11$ см, $AD = 21$ см. Площадь ее диагонального сечения равна 180 см². Вычислите полную поверхность призмы.

Ответ: 906 см².

Задача 4.44. В основании прямой призмы лежит прямоугольный треугольник с меньшим катетом a , стороны которого образуют геометрическую прогрессию. Найдите объем призмы, если площадь наибольшей боковой грани равна сумме площадей оснований.

Ответ: $\frac{a^3}{2}$.

4.10. Наклонные призмы.

Пример 4.45. [122] Основанием призмы $ABCA_1B_1C_1$ служит правильный треугольник ABC со стороной a . Вершина A_1 проектируется в центр нижнего основания, а ребро AA_1 наклонено в плоскости основания под углом 60° . Определить боковую поверхность призмы.

РЕШЕНИЕ. Вершина A_1 проектируется в центр основания правильного треугольника — точку пересечения биссектрис (рис. 117). Тогда углы A_1AB и A_1AC равны, отсюда треугольники AEC и AEB равны по первому признаку. В плоскости AA_1C опустим перпендикуляр CE из точки C на ребро AA_1 . Соединим точки E и B , $EB \perp AA_1$ в силу равенства треугольников AEC и AEB . Таким образом, плоскость $BEC \perp AA_1$, и BEC — перпендикулярное ребру сечение наклонной

призмы. Воспользуемся формулой (4.1) для боковой поверхности наклонной призмы:

$$S_{\text{бок}} = P_{\text{перп.сечения}} \cdot L_{\text{бок.ребра}} \iff S = P_{BEC} \cdot AA_1.$$

Найдем стороны треугольника BEC . По теореме о трех косинусах (1.2) имеем

$$\cos \angle A_1AB = \cos \angle A_1AC = \cos 60^\circ \cdot \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

Отсюда $\sin \angle AA_1C = \sqrt{1 - \frac{3}{16}} = \frac{\sqrt{13}}{4}$. Тогда из прямоугольного $\triangle ACE$ получаем

$$CE = \frac{\sqrt{13}}{4}a; \quad BE = CE.$$

Из равностороннего $\triangle ABC$ получаем $AO = \frac{a\sqrt{3}}{3}$, а из прямоугольного $\triangle AA_1O$ имеем $AA_1 = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$. Тогда площадь боковой поверхности призмы равна

$$S = P_{BEC} \cdot AA_1 = \left(2\frac{\sqrt{13}}{4}a + a\right) \frac{2a\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{13} + 2}{3} \cdot \sqrt{3}a^2.$$

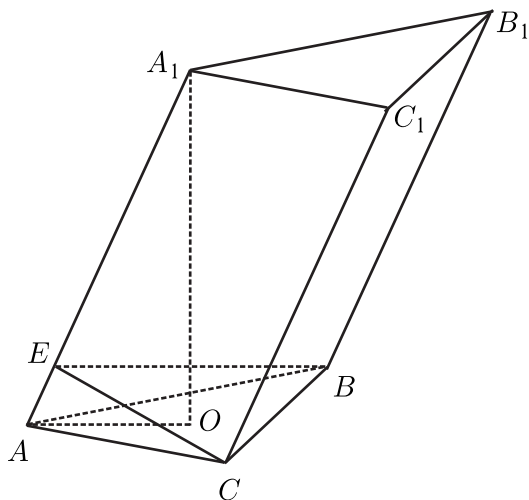


Рис. 117. К примеру 4.45.

Ответ: $\frac{(\sqrt{13} + 2)\sqrt{3}}{3}a^2$.

Задача 4.46. [122] Основанием наклонной призмы служит правильный треугольник со стороной, равной a . Длина бокового ребра равна b , а одно из боковых ребер образует с прилежащими сторонами основания углы 45° . Определить объем этой призмы.

Ответ: $\frac{a^2 b}{4}$.

Задача 4.47. [18] В основании наклонной призмы лежит правильный треугольник со стороной равной a . Одна из боковых граней призмы перпендикулярна плоскости основания и представляет собой ромб, диагональ которого равна b . Найдите объем призмы.

Ответ: $\frac{ab\sqrt{3(4a^2 - b^2)}}{8}$.

4.11. Ответы к задачам на построение сечений.

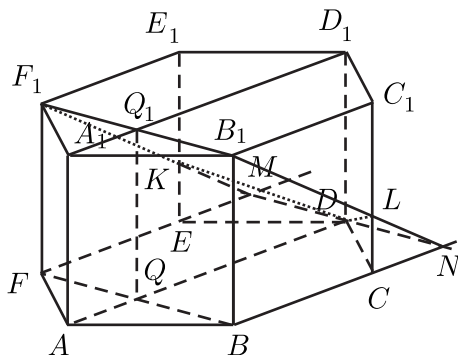


Рис. 118. К задаче 4.4.

4.12. Задачи повышенной сложности.

- [1] МГУ, физический ф-т, 2004 (март), №8(8).
В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ ($AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1$) $AA_1 : AB = 4 : 3$. На боковых ребрах AA_1 , BB_1 и CC_1 взяты точки K , L и M соответственно, так что $AK : KA_1 = 3 : 1$, $BL = LB_1$, $CM : MC_1 = 1 : 3$. Найдите двугранный угол между плоскостями KLM и ABC .
Ответ: $\arctg \frac{2}{3}$.

4.13. Задачи для самостоятельного решения.

Обязательные задачи.

- [105] В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ стороны основания равны 16, боковые ребра равны 6.
 - Докажите, что сечение, проходящее через вершины A , B и середину ребра A_1C_1 , является равнобедренной трапецией.
 - Найдите площадь данного сечения.

2. [18] Определите объем правильной шестиугольной призмы, у которой наибольшая диагональ равна d , а боковые грани — квадраты.
3. [18] Правильная шестиугольная призма, боковые ребра которой равны 3 см, рассечена диагональной плоскостью на две равные четырехугольные призмы. Определите объем шестиугольной призмы, если боковая поверхность четырехугольной призмы равна 30 см^2 .
4. [105] В основании прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит равнобедренный треугольник ABC с основанием AC . Точка K — середина ребра A_1B_1 , а точка M делит ребро AC в отношении $AM : MC = 1 : 3$.
 - а) Докажите, что KM перпендикулярно AC .
 - б) Найдите угол между прямой KM и плоскостью ABB_1 , если $AB = 5$, $AC = 8$ и $AA_1 = 4$. сечения.
5. [105] Основанием прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ является равнобедренный $\triangle ABC$, в котором $AB = BC = 20$, $AC = 32$. Боковое ребро призмы равно 24. Точка P принадлежит ребру BB_1 , причем $BP : PB_1 = 1 : 3$.
 - а) Пусть M — середина A_1C_1 . Докажите, что прямые MP и AC перпендикулярны.
 - б) Найдите тангенс угла между плоскостями $A_1B_1C_1$ и ACP .
6. [114] В основании прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C . Точка M — середина ребра B_1C_1 , точка N лежит на ребре AC , причем $AN : NC = 15 : 1$. Катет AC в четыре раза больше бокового ребра AA_1 призмы.
 - а) Докажите, что прямая MN перпендикулярна прямой CA_1 .
 - б) Найдите угол между прямой MN и плоскостью основания $A_1B_1C_1$, если $\cos \angle CBA = \frac{1}{\sqrt{5}}$.
7. ЕГЭ-2023, основной вариант, №13.

Дана прямая призма, в основании которой равнобедренная трапеция с основаниями $AD = 5$ и $BC = 3$. Точка M делит ребро A_1D_1 в отношении $A_1M : MD_1 = 2 : 3$, точка K — середина DD_1 .

 - а) Докажите, что плоскость MCK параллельна стороне BD .
 - б) Найдите тангенс угла между плоскостью MKC и плоскостью основания, если $\angle ADC = 60^\circ$, а $\angle CKM = 90^\circ$.
8. [75] В основании прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит равнобедренный треугольник ABC с гипотенузой AB , равной $8\sqrt{2}$. Высота призмы равна 6.
 - а) Докажите, что плоскость, содержащая прямую AC_1 и параллельная прямой CB_1 , проходит через середину ребра A_1B_1 .
 - б) Найдите угол между прямыми AC_1 и CB_1 .

9. Дана правильная шестиугольная призма $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ все ребра которой равны a .
а) Докажите, что $AC_1 \perp BE$.
б) Найдите угол между прямыми AB_1 и CD_1 .
10. [75] В правильной треугольной призме $ABCA_1 B_1 C_1$ высота равна 1, а ребро основания равно 2.
а) Докажите, что точки A и B_1 равноудалены от плоскости $A_1 BC_1$.
б) Найдите расстояние от точки A_1 до прямой BC_1 .
11. [113] В правильной шестиугольной призме $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки B до прямой $A_1 D_1$.
12. [75] В правильной шестиугольной призме $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$, все ребра которой равны 4.
а) Докажите, что плоскости $AB_1 C_1$ и ECC_1 перпендикулярны.
б) Найдите расстояние от точки A до прямой $B_1 C_1$.
13. [75] В правильной шестиугольной призме $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$, все ребра равны 1.
а) Докажите, что прямая BF_1 перпендикулярна прямой $F_1 E_1$.
б) Найдите расстояние от точки B до прямой $E_1 F_1$.
14. [18] В основании наклонной призмы лежит трапеция. Выразите объем призмы через площади S_1 и S_2 параллельных боковых граней и расстояние h между ними.
15. [18] Докажите, что объем прямой призмы, основанием которой служит трапеция, равен произведению среднего арифметического площадей параллельных боковых граней на расстояние между ними.
16. [3] Площадь наибольшего диагонального сечения правильной шестиугольной призмы равна 1. Найдите площадь боковой поверхности призмы.
17. МГУ, внутренний экзамен, 2014, №7(8).
В основании прямой призмы лежит правильный треугольник со стороной 2. Высота призмы равна $\sqrt{3}$. Найдите расстояние между скрещивающимися диагоналями боковых граней.
18. МГУ, внутренний экзамен, 2014, №7(8).
В основании прямой призмы лежит квадрат со стороной 1. Высота призмы равна $\sqrt{3}$. Найдите расстояние между большой диагональю призмы и скрещивающейся с ней диагональю боковой грани.

19. [122] Основанием призмы служит параллелограмм с острым углом, равным α . Боковое ребро, проходящее через вершину данного угла α , равно b и составляет с прилежащими сторонами равные углы, каждый из которых равен β . Найдите высоту призмы.

Ответ: $\frac{b}{\cos \frac{\alpha}{2}} \sqrt{\sin \left(\beta + \frac{\alpha}{2} \right) \sin \left(\beta - \frac{\alpha}{2} \right)}.$

20. [75] ЕГЭ-2016, пробный вариант, С.Петербург, №14.
В правильной четырехугольной призме $KLMNK_1L_1M_1N_1$ точка E делит боковое ребро KK_1 в отношении $KE : EK_1 = 1 : 3$. Через точки L и E проведена плоскость α , параллельная прямой KM и пересекающая ребро NN_1 в точке F .

- а) Докажите, что плоскость α делит ребро NN_1 пополам.
- б) Найдите угол между плоскостью $KLMN$ и плоскостью α , если известно, что $KL = 6$, $KK_1 = 4$.

21. [75] ЕГЭ-2017, основная волна, №14.
Основанием прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ является прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C . Прямые CA_1 и AB_1 перпендикулярны.

- а) Докажите, что $AA_1 = AC$.
- б) Найдите расстояние между прямыми CA_1 и AB_1 , если $AC = 7$, $BC = 8$.

22. [75] ЕГЭ-2026, основная волна, №14.
В правильной треугольной призме $BCA_1B_1C_1$ отметили точки M и K на ребрах AA_1 и A_1B_1 соответственно. Известно, что $AM = 3MA_1$, $A_1K = KB_1$. Через точки M и K провели плоскость α перпендикулярно плоскости ABB_1A_1 .

- а) Докажите, что плоскость α проходит через вершину C_1 .
- б) Найдите расстояние от точки A_1 до плоскости α , если все ребра призмы равны 16.

23. [75] ЕГЭ-2025, основная волна, №14.
В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ все ребра которой равны, на ребре AA_1 отмечена точка M . Известно, что $AM = 3MA_1$. Через точки M и C_1 перпендикулярно грани ABB_1A_1 проведена плоскость α .

- а) Докажите, что плоскость α делит ребро A_1B_1 пополам.
- б) Найдите высоту призмы, если площадь сечения призмы $ABCA_1B_1C_1$ плоскостью α равна $\sqrt{15}$.

Дополнительные задачи.

1. [89] Найдите сторону основания правильной треугольной призмы объемом V , если угол между диагоналями двух ее боковых граней, проведенными из одной вершины, равен α .
2. [18] Основанием прямой призмы служит прямоугольный треугольник с гипотенузой, равной s , и острым углом 30° . Через гипотенузу нижнего основания и вершину прямого угла верхнего основания проведена плоскость, образующая с плоскостью основания угол 45° . Определите объем треугольной пирамиды, отсеченной от призмы плоскостью.

Список литературы

1. Г.Н. Медведев. Задачи вступительных экзаменов по математике на физическом факультете МГУ 1971-2006 гг. М.: Комкнига, 2007.
2. О.Ю. Черкасов, А.Г. Якушев. Математика для поступающих в вузы. М. 1996.
3. 3000 Конкурсных задач по математике, Москва, 1998.
4. Вступительные экзамены по математике 2000-2002. Задачи с ответами и решениями. Варианты письменных и устных экзаменов по материалам вступительных испытаний в МГУ имени М.В.Ломоносова. Москва, 2003.
5. Математика. Задачи вступительных экзаменов. Москва, УНЦ ДО, 2004.
6. М.Л.Галицкий, А.М.Гольдман, Л.И.Званич. Сборник задач по алгебре. Учебное пособие для 8-9 классов с углубленным изучением математики. М., Просвещение, 2002.
7. Г.М.Фихтенгольц. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т.2. М. Наука, 1969.
8. Б.П.Демидович Сборник задач и упражнений по математическому анализу. М., АСТ, 2005.
9. В.Ф.Бутузов, Н.Ч.Крутицкая, Г.Н.Медведев, А.А.Шишкин Математический анализ в вопросах и задачах. М. Физматлит, 2002.
10. Л.В.Тарасов, А.Н.Тарасова Вопросы и задачи по физике (Анализ характерных ошибок поступающих во вузы). М. Высшая школа, 1990.
11. В.В.Ткачук Математика — абитуриенту М., Издательство МЦНМО, 2005.
12. П.И.Горнштейн, В.Б.Полонский, М.С.Якир Задачи с параметрами М.: Илекса, 2002.
13. В.В.Амелькин, В.Л.Рабцевич Задачи с параметрами: Справочное пособие по математике. Минск. Асар. 2002.
14. С.А.Шестаков, Е.В.Юрченко Уравнения с параметром. М.: Слог. 1993.
15. Л.М.Лукина, В.Л.Натяганов Сборник задач по геометрии и тригонометрии М.: УНЦ ДО, 2003.
16. С.Н.Олехник, М.К.Потапов, П.И.Пасиченко Уравнения и неравенства. Нестандартные методы решения. М.: Факториал, 1997.
17. В.М.Говоров, П.Т.Дыбов, Н.В.Мирошин, С.Ф.Смирнова Сборник конкурсных задач по математике для поступающих в вузы. М.: ОНИКС 21 век, 2003.
18. Сборник задач по математике для поступающих в вузы. Под редакцией М.И.Сканави М.: ОНИКС 21 век, 2005.
19. М.В.Лурье Тригонометрия. М.: УНЦ ДО, 2004.
20. М.В.Федотов, Е.Н.Хайлов Задачи устного экзамена по математике М.: факультет ВМиК МГУ, 2000.
21. М.В.Лурье Геометрия. М.: УНЦ ДО, 2002.
22. В.Л.Натяганов, Л.М.Лукина Методы решения задач с параметрами М.: Изд-во МГУ, 2003.
23. Ф.Ф.Нагибин, Е.С.Канин Математическая шкатулка М.: Просвещение, 1988.
24. М.В.Лурье Задачи на составление уравнений. М.: УНЦ ДО, 2002.
25. Л.С.Атанасян, В.Ф.Бутузов, С.Б.Кадомцев, Э.Г.Позняк Геометрия: Учебник для 7-9 классов общеобразовательных учреждений. М.: Просвещение, 1998.
26. С.Романов, И.Шарыгин Алгебраический метод решения геометрических задач // Квант, 1975, №11.
27. А.Мордкович Применение тригонометрии при решении геометрических задач // Квант, 1972, №7.
28. Г.В.Дорощев, М.К.Потапов, Н.Х.Розов О письменных вступительных экзаменах по математике на естественных факультетах МГУ (1966 и 1967 гг.)
29. Учебные компьютерные курсы компании ФИЗИКОН (www.mathematics.ru)
30. А.Савин. Тригонометрия. // Квант, 1996, №4.
31. Вилленкин Н.Я. Комбинаторика М.: Наука, 1969.
32. Сергеев И.Н. Математика. задачи с ответами и решениями М.: КДУ, 2005.
33. Г.А. Бендриков, Б.Б. Буховцев, В.В. Керженцев, Г.Я. Мякишев. Физика. Задачи для поступающих в вузы. М.:Физматлит, 2000.
34. Алгебра и начала анализа. 3600 задач для школьников и поступающих в вузы. М.:Дрофа, 1999.
35. Проспект для поступающих в РГМУ. Москва, 2002.
36. Г.М.Фихтенгольц. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т.1. М.: Наука, 1969.
37. В.В. Зайцев, В.В.Рыжков, М.И.Сканави. Элементарная математика. М.: Наука, 1974.
38. Вступительные экзамены и олимпиады по математике 2003-2005. Задачи с ответами и решениями. Варианты письменных и устных экзаменов, задания олимпиад: по материалам вступительных испытаний в МГУ имени М.В.Ломоносова. Москва, 2006.
39. И.Шарыгин. Задачи по геометрии и планиметрии. Библ. журнала Квант, вып. 17. М.: Наука, 1986.
40. Математика: ЕГЭ-2008: реальные задания / авт.-сост. В.В. Кочагин, Е.М. Бойченко, Ю.А. Глазков и др. — М.: АСТ: Астрель, 2008.
41. ЕГЭ-2008: Математика: Тематические тренировочные задания / В.В. Кочагин, М.Н. Кочагина. — М.: Эксмо, 2008.
42. ЕГЭ-2009: Математика: Сдаем без проблем! / О.А. Креславская и др. — М.: Эксмо, 2008.
43. ЕГЭ-2008: Математика: Тренировочные задания / Т.Ф. Корешкова, Н.В. Шевелева, В.В. Мирошин. — М.: Эксмо, 2008.
44. ЕГЭ-2009: Математика: Тематические тренировочные задания / В.В. Кочагин, М.Н. Кочагина. — М.: Эксмо, 2009.
45. Математика. Задачи вступительных экзаменов и олимпиад на геологическом факультете МГУ за 1984-2008 годы. М.:МАКСПРЕСС, 2009.
46. Л.О. Денищев, Ю.А. Глазков, К.А. Краснянская, А.Р. Рязановский, П.В. Семенов Единый государственный экзамен 2009. Математика. Универсальные материалы для подготовки учащихся / ФИПИ — М.: Интеллект-Центр, 2009.
47. Н.И. Гольдфарб Сборник вопросов и задач по физике. Учеб. пособие. М.: Высш. школа, 1983.
48. Ю.А. Глазков, И.К. Варшавский, М.Я. Гаишвили. Математика. ЕГЭ: сборник задач и методических рекомендаций. М.:Издательство «Экзамен», 2008.
49. И.М. Гельфанд, С.М. Львовский, А.Л. Тоом. Тригонометрия. М.: МЦНМО, 2003.

50. Задачи вступительных экзаменов / Составители А.А. Егоров, В.А. Тихомирова. — М.: Бюро Квантум, 2008. (Приложение к журналу «Квант» №6/2008.)
51. Самое полное издание типовых вариантов реальных заданий ЕГЭ: 2009 : Математика /авт. -сост. В.И. Ишина, В.В. Кочагин, Л.О. Денищева и др. — М.: АСТ: Астрель, 2009.
52. ЕГЭ-2009: Математика: Тренировочные задания / Т.Ф. Корешкова, В.В. Мирошин, Н.В. Шевелева. — М.: Эксмо, 2009.
53. И.Р. Висоцкий, Д.Д. Гушин, П.И. Захаров и др. — ЕГЭ-2010: Математика. М.: АСТ: Астрель, 2010.
54. И.В. Ященко, С.А. Шестаков, П.И. Захаров и др. —Подготовка к ЕГЭ по математике 2010г.: Математика. МЦНМО 2009.
55. ЕГЭ-2008: Математика. Сборник заданий / В.В. Кочагин, М.Н. Кочагина. — М.: Эксмо, 2008.
56. В.В. Прасолов Задачи по планиметрии. Часть 1. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1991.
57. Росс Хонсбергер Математические изюминки. Часть 1. М.: ТЕРРА-Книжный клуб, 2008.
58. С.А. Шестаков, П.И. Захаров. —Задача С1. МЦНМО 2010.
59. А.П. Власова, Н.В. Евсеева, Н.И. Латанова, Л.А. Шишкина, Г.В. Хромова Математика: 50 типовых вариантов экзаменационных работ для подготовки к ЕГЭ. М.: АСТ: Астрель, 2010.
60. В.В. Вавилов, И.И. Мельников, С.Н. Олехник, П.И. Пасиченко Задачи по математике. Уравнения и неравенства. М.: Наука, 1987.
61. И.Н. Сергеев, В.С. Панферов. ЕГЭ 2010 Задача С3. Уравнения и неравенства. М.: МЦНМО 2011.
62. R.D. Shapma Mathematics Class XI. Dhanpat RAI Publications (P) LTD 2010.
63. В.П. Моденов. Математика. Пособие для поступающих в вузы. М.: ООО «Издательство Новая волна», 2002.
64. Л.Д. Лаппо, М.А. Попов. Математика. Практикум 2011. Изд-во «Экзамен» М. 2011.
65. А.И. Козко, В.С. Панферов, И.Н. Сергеев, В.Г. Чирский ЕГЭ 2010. Математика. Задача С5. М.: МЦНМО, 2010.
66. Р.К. Гордин ЕГЭ 2010. Математика. Задача С4. М.: МЦНМО, 2010.
67. А.Г. Мордкович, Л.О. Денищева, Т.А. Корешкова, Т.Г. Мишустина, П.В. Семенов, Е.Е. Тульчинская Алгебра и начала математического анализа. 10-11 классы. В 2 ч. Ч.2 Задачник для учащихся общеобразовательных учреждений (базовый уровень) / под ред. А.Г. Мордковича. — 10-е изд., стер. — М.: Мнемозина, 2009.
68. ЕГЭ. Математика. Типовые экзаменационные варианты. 30 вариантов. Под редакцией А.Л. Семенова, И.В. Ященко. М.: 2010.
69. С.И. Колесникова ЕГЭ. Математика. Иррациональные неравенства. М.: 2010.
70. С.И. Колесникова ЕГЭ/ГИА. Математика. Уравнения и неравенства, содержащие модули. М.: 2010.
71. Корянов А.Г., Прокофьев А.А. Отбор корней в тригонометрических уравнениях (типové задания С1).
72. Г.Н.Медведев. Участник олимпиад и вступительных испытаний по математике 1971-2008. М.: URSS, 2011.
73. ЕГЭ-2012. Математика: типовые экзаменационные варианты: 30 вариантов. Под редакцией А.Л. Семенова, И.В. Ященко, М.: Национальное образование, 2011.
74. Корянов А.Г., Прокофьев А.А.Уравнения и неравенства с параметрами: количество решений (типové задания С5).
75. <http://reshuege.ru/>.
76. Ляшко М.А., Ляшко С.А., Муравина О.В. Математика: учебное пособие. Сдаем ЕГЭ 2011. Дрофа 2011.
77. ЕГЭ-2013. Математика. Типовые экзаменационные варианты 30 вариантов. Под редакцией А.Л. Семенова, И.В. Ященко, М.: Национальное образование, 2012.
78. ЕГЭ-2013. Математика. 30 типовых вариантов заданий для подготовки к единому государственному экзамену. Под редакцией А.Л. Семенова, И.В. Ященко, М.: Астрель, 2013.
79. Корянов А.Г., Прокофьев А.А. Математика ЕГЭ-2011 (типové задания С4).
80. ЕГЭ-2013. Математика. 30 вариантов типовых тестовых заданий и 800 заданий части 2(С). Под ред. А.Л. Семенова, И.В. Ященко. — М. Издательство «Экзамен», 2013.
81. С.И. Колесникова ЕГЭ. Математика. Показательные и логарифмические неравенства. М.: 2010.
82. Математика. Сборник тестов по плану ЕГЭ 2009: учебно-методическое пособие / Под ред. А.Г. Клово, Д.А. Мальцева. — Ростов н/д: Издатель Мальцев Д.А.; М. НИИ школьных технологий, 2009.
83. И.В. Ященко, С.А. Шестаков, П.И. Захаров Подготовка к ЕГЭ по математике 2011г.: Математика. Методические указания. МЦНМО 2011.
84. Оптимальный банк заданий для подготовки учащихся. Единый государственный экзамен 2014. Математика. Учебное пособие. / А.В. Семенов, А.С. Трепалин, И.В. Ященко, П.И. Захаров. — М.: Интеллект-Центр, 2014. alexlarin.net.
85. А.Д. Кутасов, Т.С. Пиголькина, В.И. Чехлов, Т.Х. Яковлева Пособие по математике для поступающих в вузы. Под редакцией Г.Н. Яковлева. — М.: Наука, 1981.
87. ЕГЭ-2014. Математика. 30 вариантов типовых тестовых заданий и 800 заданий части 2(С). Под ред. А.Л. Семенова, И.В. Ященко. — М. Издательство «Экзамен», 2014.
88. Б.А. Кордемский Математическая смелкалка Государственное издательство физико-математической литературы М.: 1958.
89. ЕГЭ-2016. Математика. 30 вариантов типовых тестовых заданий и 800 заданий части 2. Под ред. И.В. Ященко. — М. Издательство «Экзамен», 2016.
90. ЕГЭ-2016. Математика. 50 вариантов типовых тестовых заданий. Под ред. И.В. Ященко. — М. Издательство «Экзамен», 2016.
91. Л.С.Атанасян, В.Ф.Бутузов, С.Б.Кадомцев, Л.С.Киселева, Э.Г.Позняк Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия: Учебник для 10-11 классов общеобразовательных учреждений: базовый и углубленный уровни. М.: Просвещение, 2014.
92. ЕГЭ-2015. Математика: типовые экзаменационные варианты: 36 вариантов. — М. Издательство «Национальное образование», 2015.
93. Л.И. Завич, Л.Я. Шляпочник, М.В. Чинкина Алгебра и начала анализа: 3600 задач для школьников и поступающих в вузы. — М.: Дрофа, 1999.
94. <http://math100.ru>
95. ЕГЭ-2016. Математика. Профильный уровень. 50 вариантов. Типовые тестовые задания от разработчиков ЕГЭ. Под ред. И.В. Ященко. — М. Издательство «Экзамен», 2016.

96. <https://ege-ok.ru>
97. И.В. Ященко, С.А. Шестаков. Математика. ЕГЭ-2020. Профильный уровень. — Издательство «МЦНМО», Москва, 2020.
98. В.К. Егеров и др. Сборник задач по математике для поступающих во втузы. Книга 2. Геометрия. — М.: «Высшая школа», 1995.
99. И.Г. Габович Алгоритмический подход к решению геометрических задач. — М. «Просвещение», 1996.
100. И.Ф. Шарыгин Математика. 2200 задач по геометрии для школьников и поступающих в вузы. — М.: «Дрофа», 1999.
101. А.В. Погорелов Геометрия: Учеб. для 7-11 кл. общеобразоват. учреждений. М.: Просвещение, 1998.
102. И.В. Ященко, С.А. Шестаков Подготовка к ЕГЭ по математике в 2021 году. Профильный уровень. — М.: МЦНМО, 2021.
103. ЕГЭ 2020. Математика. Профильный уровень. 50 вариантов. Типовые варианты экзаменационных заданий от разработчиков ЕГЭ. Под ред. И.В. Ященко. — М.: Издательство «Экзамен», издательство МЦНМО, 2020.
104. Г.И. Вольфсон, М.Я. Пратусевич, С.Е. Рукшин, К.М. Столбов, И.В. Ященко ЕГЭ-2013. Математика. Задача С6. Арифметика и алгебра. М.: МЦНМО, 2013.
105. ЕГЭ 2022. Математика. Профильный уровень. 50 вариантов. Типовые варианты экзаменационных заданий от разработчиков ЕГЭ. Под ред. И.В. Ященко. — М.: Издательство «Экзамен», издательство МЦНМО, 2022.
106. ЕГЭ-2020. Математика: 30 тренировочных вариантов экзаменационных работ для подготовки к единому государственному экзамену. Профильный уровень. — М.: АСТ, 2020.
107. И.В. Ященко, С.А. Шестаков Подготовка к ЕГЭ по математике в 2021 году. Профильный уровень. М.: МЦНМО, 2021.
108. И.В. Ященко, И.Р. Высоцкий ЕГЭ. Математика. Профильный уровень: типовые экзаменационные варианты: 36 вариантов. М.: Издательство «Национальное образование», 2018.
109. ЕГЭ-2015. Математика. 50 вариантов типовых тестовых заданий / под ред. И. В. Ященко. — Москва: Издательство «Экзамен», 2015. — 246 с.
110. И.В. Ященко, С.А. Шестаков ЕГЭ 2020. Математика. Профильный уровень. 20 вариантов экзаменационных заданий от разработчиков ЕГЭ. Тематическая рабочая тетрадь. М.: Издательство «Экзамен», МЦНМО, 2020.
111. ЕГЭ-2022. Математика. Профильный уровень: типовые экзаменационные варианты: 36 вариантов / под ред. И. В. Ященко. — Москва: Издательство «Национальное образование», 2022. — 224 с.
112. ЕГЭ-2024. Математика. Профильный уровень. 50 вариантов. Типовые варианты экзаменационных заданий от разработчиков ЕГЭ / под ред. И. В. Ященко. — Москва: Издательство «Экзамен», 2024. — 239 с.
113. Смирнов В. А. ЕГЭ-2013. Математика. Задача С2. Геометрия. Стереометрия. М.: МЦНМО, 2013.
114. ЕГЭ-2023. Математика. Профильный уровень. 50 вариантов. Типовые варианты экзаменационных заданий от разработчиков ЕГЭ / под ред. И. В. Ященко. — Москва: Издательство «Экзамен», 2023.
115. ЕГЭ-2021. Математика. Профильный уровень: типовые экзаменационные варианты: 36 вариантов / под ред. И. В. Ященко. — Москва: Издательство «Национальное образование», 2021. — 254 с.
116. ЕГЭ-2023. Математика. Профильный уровень: типовые экзаменационные варианты: 36 вариантов / под ред. И. В. Ященко. — Москва: Издательство «Национальное образование», 2023. — 224 с.
117. ЕГЭ-2025. Математика. Профильный уровень. 50 вариантов. Типовые варианты экзаменационных заданий от разработчиков ЕГЭ / под ред. И. В. Ященко. — Москва: Издательство «Экзамен», 2025. — 247 с.
118. ОГЭ-2023. Математика. 50 вариантов. Типовые варианты экзаменационных заданий от разработчиков ОГЭ / под ред. И. В. Ященко. — Москва: Издательство «Экзамен», 2023. — 279 с.
119. ОГЭ-2023. Математика. 36 вариантов. Типовые варианты экзаменационных заданий от разработчиков ОГЭ / под ред. И. В. Ященко. — Москва: Издательство «Национальное образование», 2023. — 220 с.
120. ЕГЭ-2024. Математика. Профильный уровень: типовые экзаменационные варианты: 36 вариантов / под ред. И. В. Ященко. — Москва: Издательство «Национальное образование», 2024. — 215 с.
121. ЕГЭ-2025. Математика. Профильный уровень: типовые экзаменационные варианты: 36 вариантов / под ред. И. В. Ященко. — Москва: Издательство «Национальное образование», 2025. — 215 с.
122. И.Г. Габович Алгоритмический подход к решению геометрических задач. — Москва, «Просвещение», 1996.
123. ЕГЭ-2021. Математика. Профильный уровень. 50 вариантов. Типовые варианты экзаменационных заданий от разработчиков ЕГЭ / под ред. И. В. Ященко. — Москва: Издательство «Экзамен», 2021. — 231 с.
124. Единый государственный экзамен 2010. Математика. Универсальные материалы для подготовки учащихся. М.: Интеллект-Центр, 2010. — 96 с.
125. <https://uchi.ru>
126. ЕГЭ 2019. Математика. С.М. Балакирев. 10 дополнительных тестовых вариантов. (авторское издание)