



МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. М.В. ЛОМОНОСОВА

Физический факультет

Н.Е. Шапкина, И.Е. Могилевский

**Пособие по математике для
10-11 классов
подготовительных курсов**

**Стереометрия
Часть 1**

Москва 2021

Шапкина Н. Е., Могилевский И. Е.
**Пособие по математике для 10-11 классов подготови-
тельных курсов. Стереометрия**

Данное пособие предназначено для подготовки к вступительным экзаменам в вузы и сдачи ЕГЭ по математике. Оно написано на основе материалов занятий по математике для 10-11 классов на подготовительных курсах физического факультета МГУ (в том числе выездных). Предполагается, что учащиеся знают школьный курс в объеме 9 классов. Однако программа в разных школах может отличаться, поэтому в пособии кратко приводятся теоретические сведения, необходимые для занятий. Для лучшего усвоения все разобранные примеры сопровождаются задачами. Как правило, аналогичная задача включена в обязательную часть домашнего задания. Дополнительные задачи в домашнем задании более сложные, но их тоже можно решить на основе разобранного материала. После номера задачи в квадратных скобках приведена ссылка на тот источник в списке литературы, из которого взята задача. Большинство задач взяты из вариантов ЕГЭ и вступительных экзаменов прошлых лет, также в пособие включен ряд оригинальных задач.

ОГЛАВЛЕНИЕ

§ 1. Основные понятия стереометрии	5
1.1. Параллельность прямых и плоскостей (5). 1.2. Скрещивающиеся прямые (5). 1.3. Перпендикулярность прямых в пространстве, прямой и плоскости (6). 1.4. Углы между прямыми и плоскостями (6). 1.5. Перпендикулярность плоскостей (8).	
§ 2. Куб	8
2.1. Основные определения и утверждения (8). 2.2. Примеры и задачи (8). 2.3. Задачи для самостоятельного решения (10).	
§ 3. Прямоугольный параллелепипед	10
3.1. Основные определения и утверждения (10). 3.2. Примеры и задачи (11). 3.3. Задачи для самостоятельного решения (17).	
§ 4. Призма	18
4.1. Основные определения и утверждения (18). 4.2. Примеры и задачи (19). 4.3. Задачи для самостоятельного решения (25).	
§ 5. Пирамиды	26
5.1. Основные определения и утверждения (26). 5.2. Примеры и задачи (28). 5.3. Задачи для самостоятельного решения (33).	
§ 6. Цилиндр	35
6.1. Основные определения и утверждения (35). 6.2. Примеры и задачи (35). 6.3. Задачи для самостоятельного решения (38).	
§ 7. Конус	38
7.1. Основные определения и утверждения (38). 7.2. Примеры и задачи (39). 7.3. Задачи для самостоятельного решения (42).	
§ 8. Шар	42

8.1. Основные определения и утверждения (42).	8.2. При-
меры и задачи (43).	8.3. Задачи для самостоятельного ре-
шения (43).	
§ 9. Комбинации тел	44
9.1. Основные определения и утверждения (44).	9.2. При-
меры и задачи (44).	9.3. Задачи для самостоятельного ре-
шения (50).	
§ 10. Соотношения между углами в правильных пирамидах	51
10.1. Основные углы (51).	10.2. Четырехугольная пирами-
да (51).	10.3. Треугольная пирамида (53).
10.4. Примеры	и задачи (55).
10.5. Задачи для самостоятельного реше-	ния (57).
Список литературы	59

§ 1. Основные понятия стереометрии

1.1. Параллельность прямых и плоскостей.

1. Две прямые в пространстве называются **параллельными**, если они лежат в одной плоскости и не пересекаются.
2. Если две прямые параллельны третьей прямой, то они параллельны.
3. **Прямая и плоскость называются параллельными**, если они не имеют общих точек.
4. Если прямая, не лежащая в данной плоскости, параллельна какой-нибудь прямой, лежащей в этой плоскости, то она параллельна данной плоскости.
5. Если плоскость проходит через прямую, параллельную другой плоскости, и пересекает эту плоскость, то линия пересечения плоскостей параллельна данной прямой.
6. **Две плоскости называются параллельными**, если они не пересекаются.
7. Если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум пересекающимся прямым другой плоскости, то эти плоскости параллельны.
8. Если две параллельные плоскости пересечены третьей, то линии их пересечения параллельны.

1.2. Скрещивающиеся прямые.

1. Два луча OA и O_1A_1 , не лежащие на одной прямой, называют сонаправленными, если они параллельны и лежат в одной полуплоскости, граница которой OO_1 [91]. Лучи OA и O_1A_1 , лежащие на одной прямой, называют сонаправленными, если они совпадают или один из них содержит другой. На рисунке 1 лучи OA и O_1A_1 , а также лучи O_2B_2 и A_2B_2 сонаправлены, а лучи OA и O_2A_2 , O_2A_2 и O_2B_2 не являются сонаправленными.

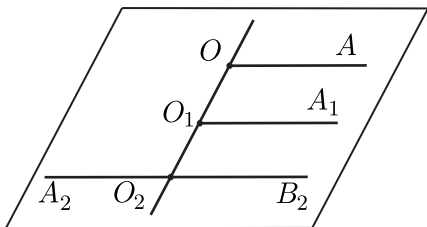


Рис. 1. Сонаправленные лучи

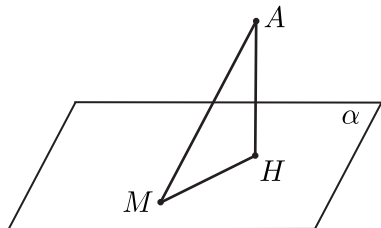


Рис. 2. Перпендикуляр и наклонная

2. Если стороны двух углов соответственно сонаправлены, то такие углы равны.
3. **Две прямые называются скрещивающимися**, если они не лежат в одной плоскости.
4. **Углом между скрещивающимися прямыми a и b** называется угол между пересекающимися прямыми a' и b' параллельными прямым a и b соответственно.

1.3. Перпендикулярность прямых в пространстве, прямой и плоскости.

1. **Две прямые в пространстве называются перпендикулярными**, если угол между ними равен 90° .
2. **Прямая называется перпендикулярной к плоскости**, если она перпендикулярна любой прямой, лежащей в этой плоскости.
3. Если одна из двух параллельных прямых перпендикулярна к плоскости, то и другая прямая перпендикулярна к этой плоскости.
4. Если две прямые перпендикулярны к плоскости, то они параллельны.
5. Если прямая перпендикулярна двум пересекающимся прямым, лежащим в плоскости, то она перпендикулярна к этой плоскости.
6. Если две плоскости перпендикулярны к некоторой прямой, то они параллельны.

1.4. Углы между прямыми и плоскостями.

1. Рассмотрим плоскость α и точку A , не лежащую в этой плоскости [91]. Проведем через точку A прямую, перпендикулярную к плоскости α , и обозначим буквой H точку пересечения этой прямой с плоскостью α (рис. 2). Отрезок AH называется **перпендикуляром, проведенным из точки A к плоскости α** , а точка H — основанием перпендикуляра. Отметим в плоскости α какую-нибудь точку M , отличную от H , и проведем отрезок AM . Он называется **наклонной, проведенной из точки A к плоскости α** , а точка M — основанием наклонной. Отрезок HM называется **проекцией наклонной на плоскость α** .
2. Перпендикуляр, проведенный из данной точки к плоскости, меньше любой наклонной, проведенной из той же точки к этой плоскости. Длина перпендикуляра, проведенного из точки A к плоскости α , **называется расстоянием от точки A до плоскости α** .

3. **Углом между прямой и плоскостью**, пересекающей эту прямую и не перпендикулярной к ней, называется угол между прямой и ее проекцией на плоскость.
4. Двугранным углом называется фигура, образованная прямой a и двумя полуплоскостями с общей границей a , называемой ребром двугранного угла, причем полуплоскости не принадлежат одной плоскости.
5. Угол, образованный при сечении двугранного угла плоскостью, перпендикулярной его ребру, называется линейным углом данного двугранного угла.
6. Градусной мерой двугранного угла называется градусная мера его линейного угла.
7. Наименьший из четырех двугранных углов, образованных двумя пересекающимися плоскостями, называется углом между плоскостями.
8. **Проекцией** ¹⁾ **точки на плоскость** называется основание перпендикуляра, проведенного из этой точки к плоскости, если точка не лежит в плоскости, и сама точка, если она лежит в плоскости. На рисунке 3 точка M_1 — проекция точки M на плоскость α . Пусть F — какая-нибудь фигура в пространстве. Если построить проекции всех точек этой фигуры на данную плоскость, получится фигура F_1 , которая называется **проекцией фигуры F на данную плоскость**.

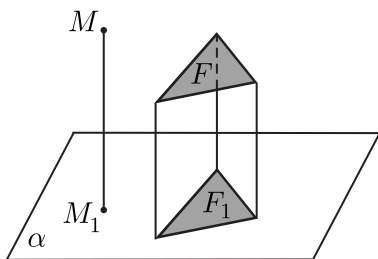


Рис. 3. Проекция точки и фигуры на плоскость

9. Проекцией прямой на плоскость, не перпендикулярную к этой прямой, является прямая.
10. **Углом между прямой и плоскостью**, пересекающей эту прямую и не перпендикулярной к ней, называется угол между прямой и ее проекцией на плоскость.

¹⁾ Имеется в виду прямоугольная (или ортогональная) проекция.

11. (Теорема о трех перпендикулярах) Прямая, проведенная в плоскости через основание наклонной перпендикулярно ее проекции, перпендикулярна и самой наклонной.
12. (Теорема, обратная теореме о трех перпендикулярах) Прямая, проведенная в плоскости через основание наклонной перпендикулярно к ней, перпендикулярна и ее проекции.
13. Площадь $S_{\text{пр}}$ ортогональной проекции многоугольника на плоскость равна площади $S_{\text{ф}}$ проектируемого многоугольника, умноженной на косинус угла φ между плоскостями многоугольника и его проекции: $S_{\text{пр}} = S_{\text{ф}} \cdot \cos \varphi$.

1.5. Перпендикулярность плоскостей.

1. **Две пересекающиеся плоскости называются перпендикулярными**, если угол между ними равен 90° .
2. Если одна из двух плоскостей проходит через прямую, перпендикулярную к другой плоскости, то такие плоскости перпендикулярны.
3. Плоскость, перпендикулярная к прямой, по которой пересекаются две данные плоскости, перпендикулярна к каждой из этих плоскостей.
4. Если две плоскости взаимно перпендикулярны, то прямая, проведенная в одной плоскости перпендикулярно линии пересечения плоскостей, перпендикулярна к другой плоскости.

§ 2. Куб

2.1. Основные определения и утверждения.

1. Объем куба $V = a^3$, где a — ребро куба.
2. Площадь поверхности куба $S = 6a^2$.
3. Диагональ куба — это отрезок, который соединяет противоположные вершины куба и проходит через центр куба. Диагональ куба равна $a\sqrt{3}$.

2.2. Примеры и задачи.

Пример 2.1. [75] *Площадь поверхности куба равна 24. Найдите его объем.*

РЕШЕНИЕ. Пусть ребро куба равно a . Поскольку площадь поверхности куба равна $6a^2$, для ребра a получаем уравнение

$$6a^2 = 24 \iff a = 2.$$

Следовательно, объем куба $V = a^3 = 8$.

Ответ: 8.

Задача 2.2. *Площадь поверхности куба равна 1,5. Найдите его объем.*

Ответ: 0,125.

Пример 2.3. [75] *Объем одного куба в 729 раз больше объема другого куба. Во сколько раз площадь поверхности первого куба больше площади поверхности второго куба?*

РЕШЕНИЕ. Пусть ребро первого куба a , ребро второго куба b . Из условия задачи следует, что

$$a^3 = 729b^3 \iff a = 9b.$$

Следовательно, отношение площадей равно $\frac{a^2}{b^2} = 81$.

Ответ: 81.

Задача 2.4. *Объем одного куба в 125 раз больше объема другого куба. Во сколько раз площадь поверхности первого куба больше площади поверхности второго куба?*

Ответ: 25.

Пример 2.5. [75] *Если каждое ребро куба увеличить на 3, то объем куба увеличится на 279. Найдите ребро куба.*

РЕШЕНИЕ. Пусть ребро куба равно a . Тогда для объема куба получим уравнение

$$(a + 3)^3 = a^3 + 279 \iff a^3 + 9a^2 + 27a + 27 = a^3 + 279 \iff a = 4.$$

Ответ: 4.

Задача 2.6. [75] *Если каждое ребро куба увеличить на 1, то объем куба увеличится на 19. Найдите ребро куба.*

Ответ: 2.

Задача 2.7. [75] *Если каждое ребро куба увеличить на 1, то площадь поверхности куба увеличится на 54. Найдите ребро куба.*

Ответ: 4.

Задача 2.8. *Разность объема куба и площади его грани равна 4. Найдите площадь поверхности куба.*

Ответ: 24.

Пример 2.9. *Диагональ куба равна d . Найдите площадь грани куба.*

РЕШЕНИЕ. Пусть ребро куба равно a (рис. 4). Тогда диагональ грани куба равна $a\sqrt{2}$, а диагональ куба равна $a\sqrt{3}$. Отсюда $d = a\sqrt{3}$, следовательно, площадь грани равна $\frac{d^2}{3}$.

Ответ: $\frac{d^2}{3}$.

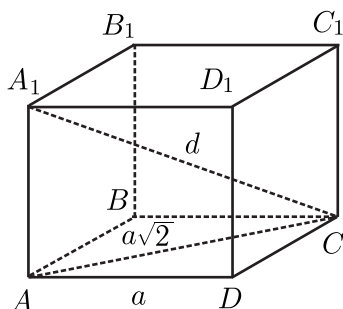


Рис. 4. К примеру 2.9.

Задача 2.10. [75] Диагональ куба равна $\sqrt{300}$. Найдите его объем.

Ответ: 1000.

2.3. Задачи для самостоятельного решения.

Обязательные задачи.

1. [102] Диагональ грани куба равна $\sqrt{8}$. Найдите его объем.
2. Кубик весит 10 г. Сколько граммов будет весить кубик, ребро которого в 3 раза больше, чем ребро первого кубика, если оба кубика изготовлены из одинакового материала?
3. Объем куба равен $3\sqrt{3}$. Найдите диагональ куба.
4. Если ребро куба уменьшить на единицу, то площадь поверхности куба уменьшится на 18. Найдите ребро куба.
5. Диагональ первого куба равна ребру второго куба. Во сколько раз площадь поверхности первого куба больше площади поверхности второго куба?
6. В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ найдите угол между диагоналями $A_1 C$ и $B_1 D$.
7. Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ со стороной 1. Найдите площади треугольников $AB_1 D_1$ и ABC_1 .

§ 3. Прямоугольный параллелепипед

3.1. Основные определения и утверждения.

1. Параллелепипед — это многогранник, у которого шесть граней и каждая из них параллелограмм.
2. Прямоугольный параллелепипед — это параллелепипед, у которого все грани прямоугольники.
3. Объем прямоугольного параллелепипеда $V = abc$, где a , b и c — длины ребер, выходящих из одной вершины.

4. Площадь полной поверхности прямоугольного параллелепипеда равна $S = 2(ab + ac + bc)$.
5. Диагональ прямоугольного параллелепипеда равна $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

3.2. Примеры и задачи.

Пример 3.1. [75] В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ известно, что $DD_1 = 1$, $CD = 2$, $AD = 2$. Найдите длину диагонали CA_1 .

РЕШЕНИЕ. Треугольник $A_1 AC$ — прямоугольный, так как $AA_1 \perp (ABC)$, откуда $AA_1 \perp AC$ (рис. 5). Сначала найдем AC из $\triangle ADC$. По теореме Пифагора $AC^2 = 8$. Следовательно, из $\triangle AA_1 C$ по теореме Пифагора $A_1 C = \sqrt{8 + 1} = 3$.

Ответ: 3.

Задача 3.2. [75] В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ известно, что $BD_1 = 3$, $CD = 2$, $AD = 2$. Найдите длину ребра AA_1 .

Ответ: 1.

Пример 3.3. [75] Два ребра прямоугольного параллелепипеда, выходящие из одной вершины, равны 3 и 4. Площадь поверхности этого параллелепипеда равна 52. Найдите третье ребро, выходящее из той же вершины.

РЕШЕНИЕ. Площадь поверхности параллелепипеда равна

$$S = 2(ab + bc + ac),$$

где a , b , c — ребра куба. Пусть $a = 3$, $b = 4$. Тогда

$$52 = 2(3 \cdot 4 + 4c + 3c) \iff c = 2.$$

Ответ: 2.

Задача 3.4. [75] Два ребра прямоугольного параллелепипеда, выходящие из одной вершины, равны 1 и 2. Объем параллелепипеда равен 6. Найдите площадь его поверхности.

Ответ: 22.

Задача 3.5. [75] Два ребра прямоугольного параллелепипеда, выходящие из одной вершины, равны 1 и 2. Площадь поверх-

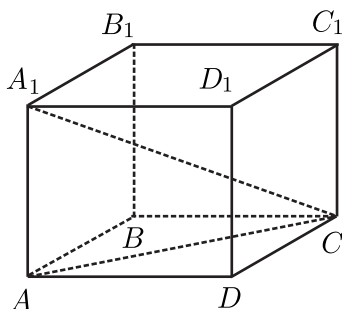


Рис. 5. К примеру 3.1.

ности параллелепипеда равна 16. Найдите его диагональ.
 Ответ: 3.

Пример 3.6. Два ребра прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ равны $AD = a$, $CD = b$. Объем параллелепипеда равен V . Найдите угол между диагональю $B_1 D$ и плоскостью ABC .

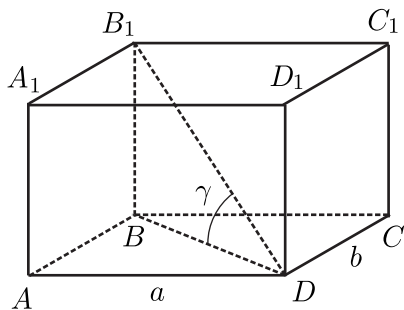


Рис. 6. К примеру 3.6.

РЕШЕНИЕ. По определению угол между диагональю $B_1 D$ и плоскостью ABC это угол γ между наклонной $B_1 D$ и ее проекцией BD на плоскость ABC (см. рис. 6). Диагональ BD основания $ABCD$ равна $BD = \sqrt{a^2 + b^2}$. Реб-

ро $BB_1 = \frac{V}{ab}$. Из $\triangle B_1 BD$

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{B_1 B}{BD} = \frac{V}{ab \sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Ответ: $\operatorname{arctg} \frac{V}{ab \sqrt{a^2 + b^2}}$.

Задача 3.7. [75] В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ известно, что $AB = 4$, $AD = 3$, $AA_1 = 5$. Найдите угол $\angle DBD_1$. Ответ дайте в градусах.
 Ответ: 45.

Пример 3.8. В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ известно, что $AB = 6$, $AD = 8$, $AA_1 = 4$. Найдите площадь сечения, проходящего через середины ребер DC , $D_1 C_1$ и BC .

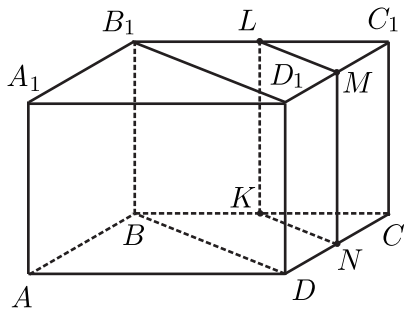


Рис. 7. К примеру 3.8.

РЕШЕНИЕ. Пусть K , M и N — середины ребер BC , $D_1 C_1$ и DC соответственно (рис. 7). Соединим точки K и N . $KN \parallel BD$ как средняя линия $\triangle BCD$, $KN = \frac{1}{2} BD$. Плоскости $(A_1 B_1 C_1) \parallel (ABC)$, поэтому плоскость искомого сечения пересекает эти плоскости по параллельным прямым: KN и LM . Очевидно, что $LK \parallel MN$, отсюда $KLMN$ — прямоуголь-

ник. Найдем KN :

$$KN = \frac{BD}{2} = \frac{\sqrt{AB^2 + AD^2}}{2} = 5.$$

Тогда $S_{KLMN} = KN \cdot MN = KN \cdot AA_1 = 20$.

Ответ: 20.

Задача 3.9. [75] В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ известно, что $AB = 2$, $AD = \sqrt{5}$, $AA_1 = 2$. Точка K — середина ребра BB_1 . Найдите площадь сечения, проходящего через точки A_1 , D_1 и K .

Ответ: 5.

Многогранники.

Пример 3.10. [75] Найдите площадь поверхности многогранника, изображенного на рис. 8 (все двугранные углы прямые).

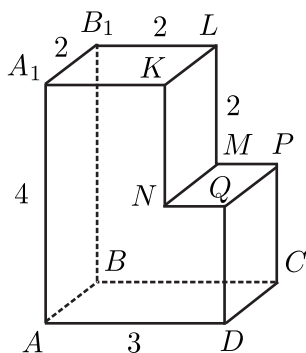


Рис. 8. К примеру 3.10.

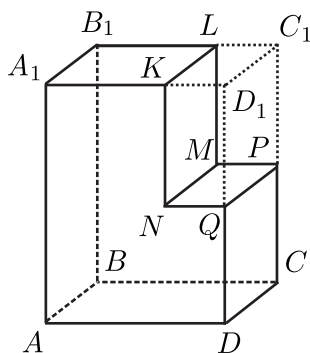


Рис. 9. К примеру 3.10.

РЕШЕНИЕ. Площадь поверхности исходного многогранника на рис. 8 равна разности площади поверхности параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, изображенного на рис. 9, и площадей двух прямоугольников NKD_1Q и MLC_1P :

$$2 \cdot 2 \cdot 4 + 2 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 - 2 \cdot 2 \cdot 1 = 48.$$

Ответ: 48.

Задача 3.11. [75] Найдите площадь поверхности многогранника, изображенного на рис. 10 (все двугранные углы прямые).

Ответ: 80.

Пример 3.12. [75] Найдите площадь поверхности многогранника, изображенного на рис. 11 (все двугранные углы прямые).

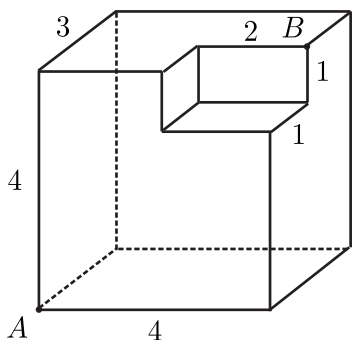


Рис. 10. К задаче 3.11.

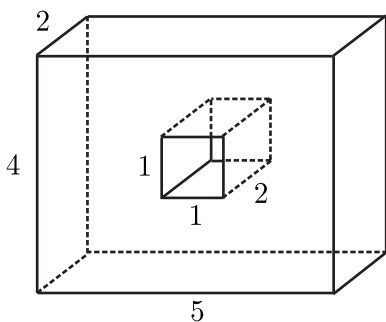


Рис. 11. К примеру 3.12.

РЕШЕНИЕ. Площадь поверхности многогранника равна площади поверхности параллелепипеда без выреза минус площадь вырезанных квадратов на передней и задней гранях плюс площадь четырех граней отверстия внутри параллелепипеда:

$$S = 2(5 \cdot 4 + 4 \cdot 2 + 5 \cdot 2) - 2 \cdot (1 \cdot 1) + 2(2 \cdot 1 + 2 \cdot 1) = 82.$$

Отметим, что расположение отверстия на результат не влияет.
 Ответ: 82.

Задача 3.13. Найдите площадь поверхности многогранника, изображенного на рис. 12 (все двугранные углы прямые).
 Ответ: 70.

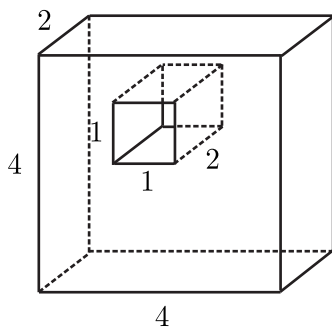


Рис. 12. К задаче 3.13.

Пример 3.14. Найдите объем многогранника, изображенного на рис. 8 (все двугранные углы прямые).

РЕШЕНИЕ. Объем многогранника равен разности объемов параллелепипедов $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ и $NMPQ K L C_1 D_1$ (рис. 9):

$$V = 2 \cdot 3 \cdot 4 - 2 \cdot 2 \cdot 1 = 20.$$

Ответ: 20.

Задача 3.15. Найдите объем многогранника, изображенного на рис. 10 (все двугранные углы прямые).

Ответ: 46.

Задача 3.16. Найдите объем многогранника, изображенного на рис. 12 (все двугранные углы прямые).

Ответ: 30.

Пример 3.17. Найдите квадраты расстояний между вершинами A и L и вершинами A и P многогранника, изображенного на рис. 8 (все двугранные углы прямые).

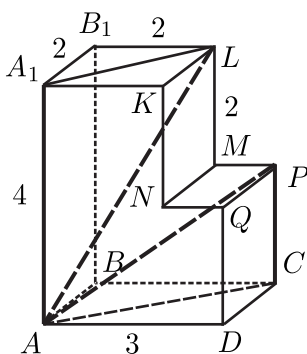


Рис. 13. К примеру 3.17.

РЕШЕНИЕ. $\triangle AA_1L$ — прямоугольный, A_1L — диагональ квадрата A_1B_1LK :

$$AL^2 = AA_1^2 + A_1L^2 = AA_1^2 + A_1B_1^2 + B_1L^2 = 16 + 4 + 4 = 24.$$

$\triangle APC$ — прямоугольный, AC — диагональ прямоугольника $ABCD$:

$$AP^2 = PC^2 + AC^2 = PC^2 + AB^2 + BC^2 = 4 + 4 + 9 = 17.$$

Ответ: 24; 17.

Задача 3.18. Найдите квадрат расстояния между вершинами A и B многогранника, изображенного на рис. 10 (все двугранные углы прямые).

Ответ: 33.

Пример 3.19. Найдите $\angle CAB_1$ многогранника, изображенного на рис. 14 (все двугранные углы прямые). Ответ дайте в градусах.

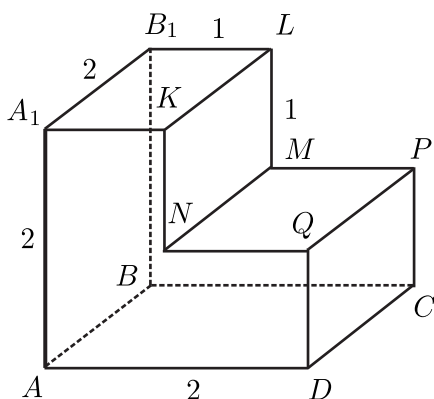


Рис. 14.

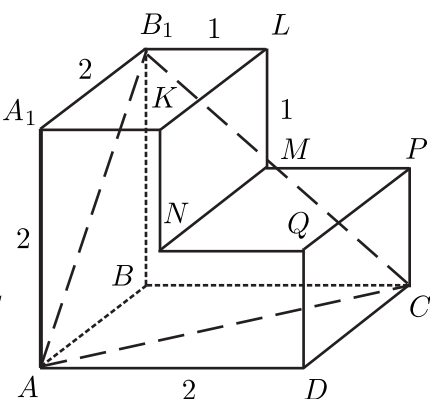


Рис. 15. К примеру 3.19.

РЕШЕНИЕ. В $\triangle SAB_1$ все стороны равны, так как являются диагоналями равных квадратов (см. рис. 15). Следовательно, все углы треугольника равны 60° .

Ответ: 60 .

Задача 3.20. Найдите $\cos \angle ADL$ многогранника, изображенного на рис. 14 (все двугранные углы прямые). В ответ запишите утроенное значение $\cos \angle ADL$.

Ответ: 1.

Пример 3.21. На рис. 16 изображен многогранник, все двугранные углы многогранника прямые. Найдите расстояние между вершинами D и D_2 и $\angle FCD_2$. В ответ запишите произведение длины отрезка DD_2 на $\sin^2 \angle FCD_2$.

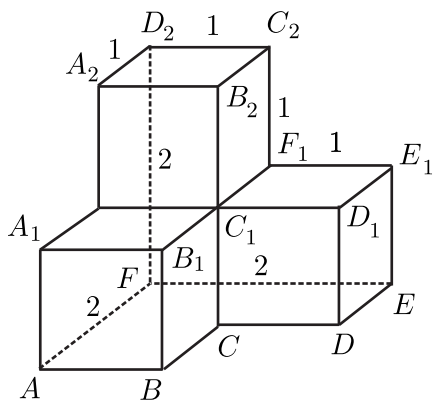


Рис. 16.

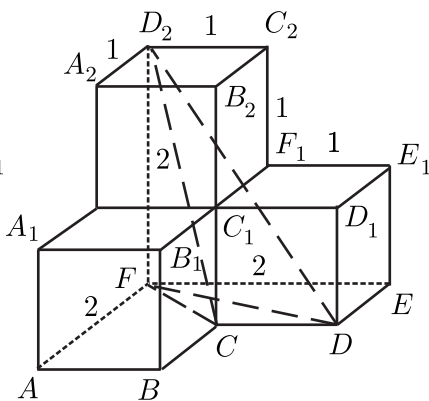


Рис. 17. К примеру 3.21.

РЕШЕНИЕ. Из треугольников FDD_2 и FDE

$$DD_2^2 = FD_2^2 + FD^2 = FD_2^2 + FE^2 + DE^2 = 4 + 4 + 1 = 9.$$

Рассмотрим $\triangle FCD_2$: $FC = \sqrt{2}$, $D_2C = \sqrt{6}$. Отсюда $\sin \angle FCD_2 = \frac{2}{\sqrt{6}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$.

Ответ: 2.

Задача 3.22. [75] На рис. 16 изображен многогранник, все двугранные углы многогранника прямые. Найдите квадрат расстояния между вершинами D и C_2 .

Ответ: 6.

Задача 3.23. [75] На рис. 16 изображен многогранник, все двугранные углы многогранника прямые. Найдите $\angle D_2EF$. Ответ дайте в градусах.

Ответ: 45.

3.3. Задачи для самостоятельного решения.

Обязательные задачи.

- [75] Два ребра прямоугольного параллелепипеда, выходящие из одной вершины, равны 3 и 4. Площадь поверхности этого параллелепипеда равна 94. Найдите третье ребро, выходящее из той же вершины.
- В прямоугольном параллелепипеде $ABCA_1B_1C_1D_1$ со сторонами $AB = BC = 1$, $AA_1 = 2$. Найдите угол между прямой AB и плоскостью AA_1C_1 . Ответ дайте в градусах.
- [75] В прямоугольном параллелепипеде $ABCA_1B_1C_1D_1$ известно, что $AB = 5$, $AD = 4$, $AA_1 = 3$. Найдите угол $\angle ABD_1$. Ответ дайте в градусах.
- [75] В прямоугольном параллелепипеде $ABCA_1B_1C_1D_1$ известно, что $AB = 24$, $AD = 10$, $AA_1 = 22$. Найдите площадь сечения, проходящего через точки A , A_1 и C .
- [102] Объем прямоугольного параллелепипеда равен 60. Площадь одной его грани равна 12. Найдите ребро параллелепипеда, перпендикулярное его грани.
- [75] В прямоугольном параллелепипеде $ABCA_1B_1C_1D_1$ ребро $BC = 4$, ребро $AB = 2\sqrt{5}$, ребро $BB_1 = 4$. Точка K — середина ребра CC_1 . Найдите площадь сечения, проходящего через точки B_1 , A_1 и K .
- В прямоугольном параллелепипеде $ABCA_1B_1C_1D_1$ $AB = 5$, $BC = 3$, $AA_1 = 12$. Найдите площадь сечения параллелепипеда плоскостью, проходящей через точки A , B_1 , C_1 .

8. [3] Диагональ прямоугольного параллелепипеда равна $10\sqrt{2}$ см и образует с плоскостью основания угол 45° . Найдите объем параллелепипеда, если одна сторона основания больше другой на 2 см.
9. В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ проведена плоскость через точки $B_1 M K$, где K — середина ребра AA_1 , M — ребра DD_1 . Найдите, какую долю объема параллелепипеда составляет объем многогранника $C_1 D_1 K B_1 A_1 M$.
10. [75] Найдите площадь поверхности многогранника, изображенного на рис. 18 (все двугранные углы прямые).

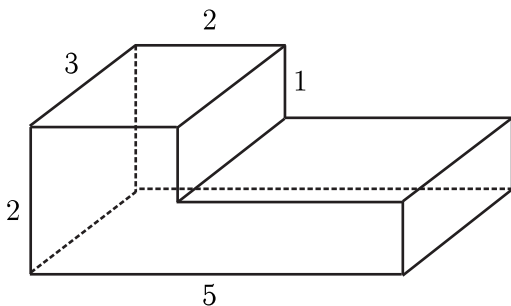


Рис. 18. К задачам 10, 11

11. Найдите объем многогранника, изображенного на рис. 18 (все двугранные углы прямые).

Дополнительные задачи.

1. [18] Основанием параллелепипеда служит квадрат. Одна из вершин верхнего основания одинаково отстоит от всех вершин нижнего основания и удалена от плоскости этого основания на расстояние, равное b . Сторона основания равна a . Определите полную поверхность параллелепипеда.

§ 4. Призма

4.1. Основные определения и утверждения.

1. Призма — это многогранная объемная фигура, которая состоит из двух одинаковых плоских многоугольников (оснований), находящихся в двух параллельных плоскостях, а другие грани (боковые грани) — параллелограммы.
2. Боковые ребра призмы параллельны и равны между собой.

3. Прямая призма — это призма, в которой все боковые грани перпендикулярны к основанию. Высота равна длине бокового ребра.
4. Правильная призма — это прямая призма, в которой основания являются правильными многоугольниками.
5. Объем призмы $V = S_{\text{осн}} \cdot H$, где H — высота призмы.
6. Площадь боковой поверхности призмы $S_{\text{бок}} = P \cdot h$; площадь полной поверхности призмы $S = 2S_{\text{осн}} + P \cdot h$, где P — периметр основания, h — высота боковой грани.

4.2. Примеры и задачи.

Пример 4.1. *В сосуд, имеющий форму прямой шестиугольной призмы, налили 1890 см^3 воды. Затем в нее погружили деталь. Уровень воды поднялся с отметки 90 см до 93 см. Найдите объем детали. Ответ выразите в см^3 .*

РЕШЕНИЕ. Объем детали равен объему вытесненной ей воды. Объем призмы равен произведению площади основания на высоту, поэтому площадь основания призмы равна $\frac{1890}{90} = 21 \text{ см}^2$. Поскольку уровень воды повысился на 3 см, объем детали составляет $21 \cdot 3 = 63 \text{ см}^3$. Отметим, что форма основания призмы в данной задаче совершенно несущественна.
Ответ: 63.

Задача 4.2. [75] *В сосуд, имеющий форму прямой треугольной призмы, налили 2300 см^3 воды и погружили в воду деталь. При этом уровень воды поднялся с отметки 25 см до 27 см. Найдите объем детали. Ответ выразите в см^3 .*
Ответ: 184.

Пример 4.3. [75] *В сосуд, имеющий форму правильной треугольной призмы, налили воду. Уровень воды достигает 180 см. На какой высоте будет находиться уровень воды, если ее перелить в другой сосуд такой же формы, у которого сторона основания будет в 6 раз больше, чем у первого. Ответ выразите в см.*

РЕШЕНИЕ. Объем треугольной призмы равен произведению площади основания на высоту. При увеличении стороны основания в 6 раз его площадь увеличится в 36 раз. Объем жидкости не изменился, поэтому высота должна уменьшиться в 36 раз.
Ответ: 5.

Задача 4.4. [75] *В сосуд, имеющий форму правильной треугольной призмы, налили воду. Уровень воды достигает 80 см. На какой высоте будет находиться уровень воды, если ее*

перелить в другой сосуд такой же формы, у которого сторона основания будет в 4 раз больше, чем у первого. Ответ выразите в см.

Ответ: 5.

Пример 4.5. [75] Найдите площадь поверхности прямой призмы, в основании которой лежит ромб с диагоналями, равными 6 и 8, и боковым ребром, равным 10.

РЕШЕНИЕ. Поверхность данной прямой призмы состоит из четырех прямоугольников и двух ромбов. Диагонали ромба d_1 и d_2 взаимно перпендикулярны и делятся точкой пересечения

пополам. Отсюда сторона ромба $a = \sqrt{\left(\frac{d_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{d_2}{2}\right)^2}$. Площадь каждого прямоугольника равна $a \cdot h$, где h — высота призмы.

Площадь каждого из ромбов равна $\frac{d_1 \cdot d_2}{2} = 24$. Тогда площадь поверхности призмы равна $4 \cdot 5 \cdot 10 + 2 \cdot 24 = 248$.

Ответ: 248.

Задача 4.6. [75] Найдите площадь боковой поверхности правильной шестиугольной призмы, сторона основания которой равна 5, а высота — 10.

Ответ: 300.

Пример 4.7. [75] Основанием прямой треугольной призмы является прямоугольный треугольник с катетами 6 и 8. Площадь ее поверхности равна 144. Найдите высоту призмы.

РЕШЕНИЕ. Площадь поверхности прямой призмы

$$S = 2S_{\text{осн}} + Ph,$$

где $S_{\text{осн}}$ — площадь одного из оснований призмы, P — периметр основания, h — высота призмы. В нашем случае периметр $P = 6 + 8 + 10 = 24$, где 10 — гипотенуза прямоугольного треугольника, лежащего в основании; $S_{\text{осн}} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 = 24$. Тогда

$$h = \frac{S - 2S_{\text{осн}}}{P} = \frac{144 - 48}{24} = 4.$$

Ответ: 4.

Задача 4.8. [75] В основании прямой призмы лежит ромб с диагоналями, равными 16 и 30. Площадь ее поверхности равна 2588. Найдите боковое ребро призмы.

Ответ: 31.

Пример 4.9. [75] *Площадь поверхности правильной треугольной призмы равна 4, какова будет площадь поверхности призмы, если все ее ребра увеличить в $k = 9$ раз?*

РЕШЕНИЕ. Для треугольников коэффициент подобия равен k , следовательно, площадь увеличится в k^2 раз. Аналогично площадь прямоугольников также увеличится в k^2 раз. Отсюда площадь всей поверхности увеличится в k^2 раз.

Ответ: 324.

Задача 4.10. *Объем правильной треугольной призмы равен 1. Каким будет объем призмы, если все ребра увеличить в 2 раза.*

Ответ: 8.

Задача 4.11. [75] *ЕГЭ-2015, досрочная волна, №8.*

Через среднюю линию основания треугольной призмы проведена плоскость, параллельная боковому ребру. Найдите площадь боковой поверхности призмы, если площадь боковой поверхности отсеченной треугольной призмы равна 37.

Ответ: 74.

Пример 4.12. [75] *В правильной шестиугольной призме $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ все ребра равны 1. Найдите расстояние между точками A и E_1 .*

РЕШЕНИЕ. Треугольник $AE E_1$ прямоугольный (рис. 19), $EE_1 = 1$. Найдем AE из $\triangle AFE$. Треугольник AFE равнобедренный, $\angle AFE = 120^\circ$ как угол в правильном шестиугольнике. Тогда $AE = 2AK = 2 \cdot AF \cdot \sin 60^\circ = \sqrt{3}$. Следовательно,

$$AE_1 = \sqrt{AE^2 + EE_1^2} = \sqrt{1 + 3} = 2.$$

Ответ: 2.

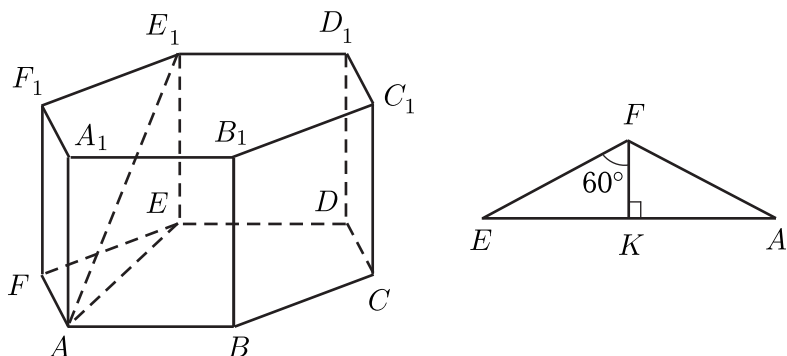


Рис. 19. К примеру 4.12.

Задача 4.13. [75] В правильной шестиугольной призме $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ все ребра равны $\sqrt{5}$. Найдите расстояние между точками B и E_1 .

Ответ: 5.

Пример 4.14. [75] В правильной шестиугольной призме $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$, все ребра которой равны 5, найдите угол между прямыми FA и $D_1 E_1$. Ответ дайте в градусах.

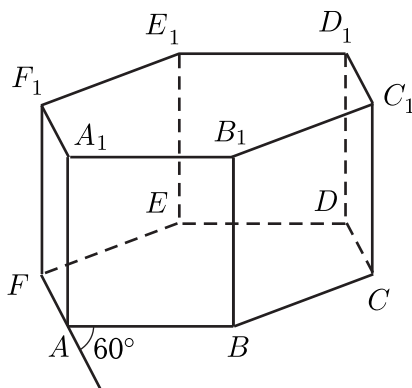


Рис. 20. К примеру 4.14.

РЕШЕНИЕ. Прямые FA и $D_1 E_1$ — скрещивающиеся (см. рис. 20). Следовательно, угол между ними равен острому углу между прямыми FA и AB , поскольку $AB \parallel D_1 E_1$. Так как $ABCDEF$ — правильный шестиугольник, $\angle FAB = 120^\circ$, а смежный с ним искомый угол равен 60° .

Ответ: 60° .

Задача 4.15. [75] В правильной шестиугольной призме $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ все ребра равны 1. Найдите тангенс угла $AD_1 D$.

Ответ: 2.

Пример 4.16. В правильной четырехугольной призме $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, все ребра которой равны 1, точки L , M середины ребер $B_1 C_1$, $C_1 D_1$ соответственно. Найдите площадь сечения, проходящего через точки B , L и M .

РЕШЕНИЕ. Указанная в условии призма является кубом ребром, равным 1. Искомым сечением будет равнобедренная трапеция $BLMD$ (рис. 21). Диагональ основания куба $BD = \sqrt{2}$,

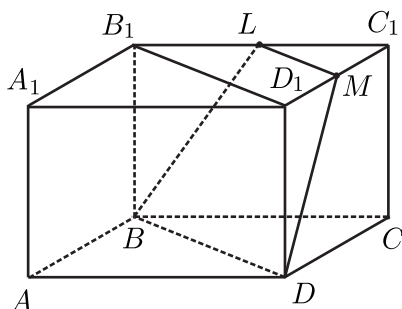


Рис. 21. К примеру 4.16.

$LM = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Из прямоугольного $\triangle BB_1L$ $BL = \frac{\sqrt{5}}{2}$. Все стороны трапеции $BLMD$ известны, можно найти ее высоту, которая равна $\frac{3}{2\sqrt{2}}$. Отсюда площадь трапеции $\frac{9}{8}$.
 Ответ: 1,125.

Задача 4.17. [75] В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ стороны основания равны 2, боковые ребра равны 5. Найдите площадь сечения призмы плоскостью, проходящей через середины ребер AB , AC , A_1B_1 и A_1C_1 .
 Ответ: 5.

Пример 4.18. [75] Площадь боковой поверхности треугольной призмы равна 24. Через среднюю линию основания призмы проведена плоскость, параллельная боковому ребру. Найдите площадь боковой поверхности отсеченной треугольной призмы.

РЕШЕНИЕ. В условии не сказано, что призма прямая, следовательно, нужно рассматривать общий случай наклонной призмы (рис. 22). Боковая поверхность призмы $ABCA_1B_1C_1$ состоит из трех параллелограммов, площадь которых равна произведению сторон на синус угла между ними. Боковая поверхность отсеченной призмы $AKNA_1LM$ состоит из трех параллелограммов, одна из сторон которых уменьшена в два раза.

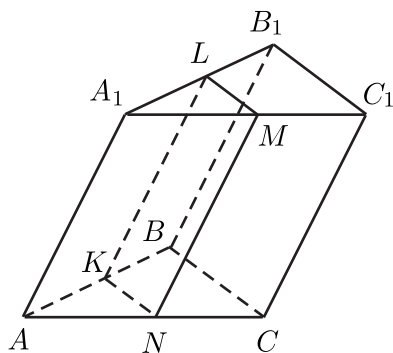


Рис. 22. К примеру 4.18.

Следовательно, площадь боковой поверхности отсеченной призмы тоже будет в два раза меньше площади боковой поверхности исходной призмы.

Ответ: 12.

Задача 4.19. Площадь боковой поверхности треугольной наклонной призмы, в основании которой лежит правильный треугольник, равна 27. Через центр основания призмы проведена плоскость, параллельная одной из боковых граней. Найдите площадь боковой поверхности отсеченной треугольной призмы.

Ответ: 18.

Пример 4.20. В наклонной треугольной призме все ребра равны 2. Боковое ребро наклонено к плоскости основания под углом 60° . Найдите объем призмы.

РЕШЕНИЕ. Опустим перпендикуляр A_1K на плоскость основания

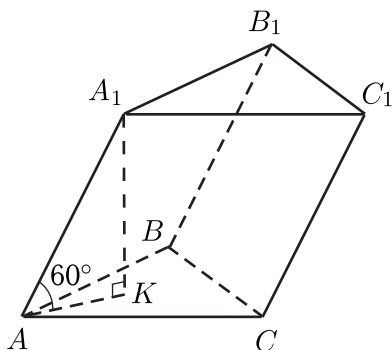


Рис. 23. К примеру 4.20.

ABC (рис. 23). Объем призмы равен произведению площади основания на высоту:

$$V = S_{ABC} \cdot A_1K = \frac{4\sqrt{3}}{4} \cdot 2 \cdot \sin 60^\circ = 3.$$

Ответ: 3.

Задача 4.21. [75] Найдите объем призмы, в основаниях которой лежат правильные шестиугольники со сторонами 2, а боковые ребра равны $2\sqrt{3}$ и наклонены к плоскости основания под углом 30° .

Ответ: 18.

4.3. Задачи для самостоятельного решения.

Обязательные задачи.

1. [103] Диагональ правильной четырехугольной призмы наклонена к плоскости основания под углом 30° . Боковое ребро равно 6. Найдите диагональ призмы.
2. ЕГЭ-2018, (8). Через среднюю линию основания треугольной призмы проведена плоскость, параллельная боковому ребру. Найдите площадь боковой поверхности призмы, если площадь боковой поверхности отсеченной треугольной призмы равна 52.
3. ЕГЭ-2018, (8). Через среднюю линию основания треугольной призмы проведена плоскость, параллельная боковому ребру. Найдите объем призмы, если объем отсеченной треугольной призмы равен 10.
4. [103] Объем треугольной призмы, отсекаемой от куба плоскостью, проходящей через середины двух ребер, выходящих из одной вершины, и параллельной третьему ребру, выходящему из той же вершины, равен 33 (рис. 24). Найдите объем куба.

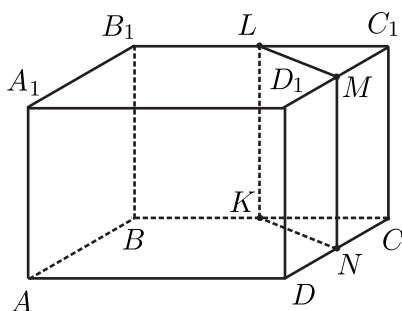


Рис. 24. К задаче 4

5. [18] Определите объем правильной четырехугольной призмы, если ее диагональ образует с плоскостью боковой грани угол 30° , а сторона основания равна a .
6. [18] В основании наклонной призмы лежит параллелограмм со сторонами 3 и 6 дм и острым углом 45° . Боковое ребро призмы равно 4 дм и наклонено к плоскости основания под углом 30° . Найдите объем призмы.
7. [18] определите объем правильной шестиугольной призмы, у которой наибольшая диагональ равна d , а боковые грани — квадраты.

Дополнительные задачи.

1. [3] Боковые грани правильной треугольной призмы — квадраты. Площадь боковой поверхности равна 144. найдите объем многогранника, вершинами которого служат центры всех граней призмы.

§ 5. Пирамиды**5.1. Основные определения и утверждения.**

1. Высота пирамиды — перпендикуляр, опущенный из вершины пирамиды на плоскость основания.
2. Апофема h_a — высота боковой грани пирамиды, проведенная из вершины.
3. Объем пирамиды $V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot h$, где $S_{\text{осн}}$ — площадь основания пирамиды, h — ее высота.
4. Пирамида называется правильной, если в основании лежит правильный многоугольник, а вершина проецируется в центр основания.
5. Площадь боковой поверхности правильной пирамиды равна $S_{\text{бок}} = ph_a$, где p — полупериметр основания, h_a — апофема.
6. В правильной треугольной пирамиде скрещивающиеся ребра попарно перпендикулярны.

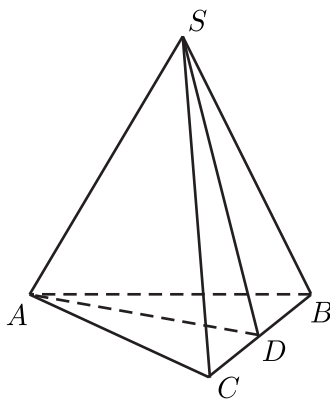


Рис. 25. К свойству 6

Доказательство. Рассмотрим правильную треугольную пирамиду (рис. 25). AD — высота и медиана в правильном $\triangle ABC$, SD — медиана и высота в равнобедренном $\triangle SBC$. Таким образом, BC перпендикулярно двум пересекающимся

ся прямым плоскости SAD , следовательно, перпендикулярно любой прямой, лежащей в этой плоскости.

7. Если все боковые ребра треугольной пирамиды наклонены под одним углом к плоскости основания, то вершина проецируется в центр круга, описанного около основания.

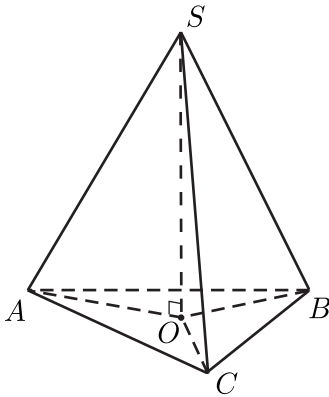


Рис. 26. К свойству 7

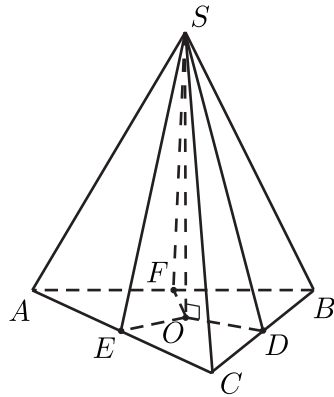


Рис. 27. К свойству 9

Доказательство. Пусть SO — высота пирамиды $SABC$ (рис. 26). Прямоугольные треугольники $\triangle SOA$, $\triangle SOB$ и $\triangle SOC$ равны по острому углу и катету SO . Следовательно, $OA = OB = OC$.

8. Если все боковые ребра треугольной пирамиды равны, то вершина проецируется в центр круга, описанного около основания.
9. Если все двугранные углы при основании треугольной пирамиды равны, то вершина проецируется в центр круга, вписанного в лежащий в основании треугольник.

Доказательство. Пусть SO — высота пирамиды $SABC$ (рис. 27). Проведем апофемы (высоты боковых граней) SD , SE и SF . По теореме о трех перпендикулярах проекции апофем перпендикулярны сторонам основания. Следовательно, $\angle SDO$, $\angle SEO$ и $\angle SFO$ — линейные углы двугранных углов при ребрах основания. Прямоугольные треугольники $\triangle SOD$, $\triangle SOE$ и $\triangle SOF$ равны по острому углу и катету SO . Следовательно, $OD = OE = OF$.

10. Если все боковые грани наклонены к плоскости основания под одним углом, то апофемы равны.

11. Если все апофемы треугольной пирамиды равны, то вершина проецируется в центр круга, вписанного в лежащий основании треугольник.

5.2. Примеры и задачи.

Пример 5.1. Объем правильной треугольной пирамиды $SABC$ равен $\frac{16}{\sqrt{3}}$, а ребро SA наклонено под углом 60° к плоскости основания. Найдите сторону основания.

РЕШЕНИЕ. Объем пирамиды равен произведению одной трети

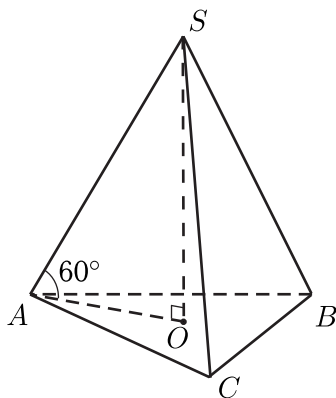


Рис. 28. К примеру 5.1.

площади основания на высоту. В правильной пирамиде вершина проецируется в центр основания пирамиды (рис. 28). Пусть сторона основания равна a . Тогда $AO = \frac{a}{\sqrt{3}}$, высота

$$SO = AO \cdot \operatorname{tg} 60^\circ = \frac{a}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{3} = a.$$

Объем пирамиды равен

$$V = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot SO = \frac{1}{3} \frac{a^3 \sqrt{3}}{4} \iff \frac{16}{\sqrt{3}} = \frac{a^3}{4\sqrt{3}} \iff a^3 = 64 \iff a = 4.$$

Ответ: 4.

Задача 5.2. В правильной треугольной пирамиде медиана основания равна $\sqrt{3}$. Боковое ребро SA наклонено под углом $\operatorname{arctg} \frac{3}{2}$ к плоскости основания. Найдите объем пирамиды.

Ответ: 1.

Задача 5.3. [75] В правильной треугольной пирамиде $SABC$ медианы основания ABC пересекаются в точке O . Площадь треугольника ABC равна 4; объем пирамиды равен 6. Найдите длину отрезка OS .

Ответ: 6.

Пример 5.4. Объем правильной четырехугольной пирамиды равен 24, а ее высота — 4. Найдите боковое ребро этой пирамиды.

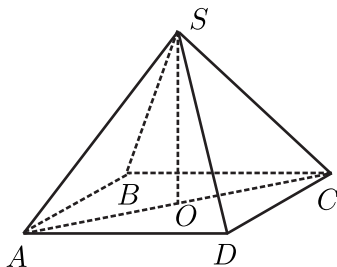


Рис. 29. К примеру 5.4.

РЕШЕНИЕ. Пусть квадрат $ABCD$ — основание пирамиды, S — ее вершина (рис. 29). Вершина пирамиды проецируется в точку O — центр квадрата, $SO = 4$. Объем пирамиды

$$V = \frac{1}{3}SO \cdot S_{ABCD} \Rightarrow AB^2 = \frac{3 \cdot 24}{4} = 18 \Rightarrow AO^2 = \frac{AB^2}{2} = 9.$$

Треугольник ASO — прямоугольный, по теореме Пифагора боковое ребро

$$AS = \sqrt{AO^2 + SO^2} = \sqrt{9 + 16} = 5.$$

Ответ: 5.

Задача 5.5. [75] В правильной четырехугольной пирамиде высота равна 6, боковое ребро равно 10. Найдите ее объем.

Ответ: 256.

Задача 5.6. [75] Во сколько раз увеличится объем правильного тетраэдра, если все его ребра увеличить в два раза?

Ответ: 8.

Пример 5.7. [75] Стороны основания правильной четырехугольной пирамиды равны 10, боковые ребра равны 13. Найдите площадь поверхности этой пирамиды.

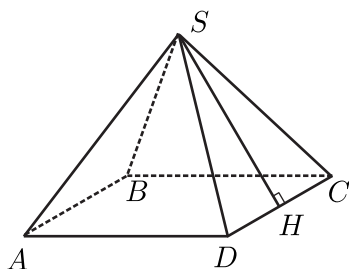


Рис. 30. К примеру 5.7.

РЕШЕНИЕ. Апофема SH является также медианой равнобедренного $\triangle DSC$ (рис. 30), $DH = \frac{1}{2}DC$. Отсюда

$$SH^2 = SD^2 - DH^2 = 13^2 - 5^2 = 144 \Rightarrow SH = 12.$$

Площадь поверхности пирамиды

$$S = S_{ABCD} + 4S_{DSC} = DC^2 + 4 \frac{DC \cdot SH}{2} = 10^2 + 4 \frac{10 \cdot 12}{2} = 340.$$

Ответ: 340.

Задача 5.8. [75] Стороны основания правильной шестиугольной пирамиды равны 10, боковые ребра равны 13. Найдите площадь боковой поверхности этой пирамиды.

Ответ: 360.

Пример 5.9. [75] Основанием пирамиды служит прямоугольник, одна боковая грань перпендикулярна плоскости основания, а три другие боковые грани наклонены к плоскости основания под углом 60° . Высота пирамиды равна 6. Найдите объем пирамиды.

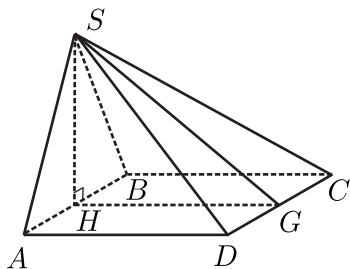


Рис. 31. К примеру 5.9.

РЕШЕНИЕ. Проведем в $\triangle ASB$ высоту SH (рис. 31), а в плоскости основания отрезок $HG \perp AB$. Угол SHG — линейный угол двугранного угла при ребре AB . По условию он равен 90° , следовательно, SH — высота пирамиды, так как она перпендикулярна двум пересекающимся прямым в плоскости ABC . Найдём стороны прямоугольника. $AB \perp AD$, так как $ABCD$ — прямоугольник, тогда по теореме о

трех перпендикулярах $SA \perp AD$ (SA — наклонная, HA — проекция). При этом $\angle SAB$ — линейный угол двугранного угла при ребре AD , так как он образован двумя перпендикулярами к AD . Следовательно, $\angle SAB = 60^\circ$. Из прямоугольного $\triangle SAH$ $AH = SH \cdot \operatorname{ctg} 60^\circ = 6 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$, отсюда $AB = 2AH = 4\sqrt{3}$.

Аналогично $\angle SGH$ — линейный угол двугранного угла при ребре DC , поэтому он также равен 60° . Из прямоугольного $\triangle SGH$ $HG = SH \cdot \operatorname{ctg} 60^\circ = 2\sqrt{3}$. Следовательно,

$$V = \frac{1}{3} SH \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot 6 \cdot 4\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3} = 48.$$

Ответ: 48.

Задача 5.10. В основании треугольной пирамиды $SABC$ лежит правильный $\triangle ABC$, $SA \perp (ABC)$. Ребро SC образует с плоскостью ABC угол, равный 45° . Найдите объем пирамиды, если ее высота равна $\sqrt{3}$.

Ответ: 0,75.

Пример 5.11. [75] Боковые ребра треугольной пирамиды взаимно перпендикулярны, каждое из них равно 3. Найдите объем пирамиды.

РЕШЕНИЕ. В силу того, что боковые ребра SA , SB и SC взаимно перпендикулярны, удобно рассматривать боковую грань, например, SBC как основание пирамиды. Тогда SA — высота пирамиды. Следовательно, объем пирамиды

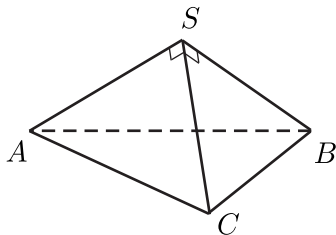


Рис. 32. К примеру 5.11.

$$V = \frac{1}{3} AS \cdot S_{SBC} = \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot \frac{3^2}{2} = \frac{9}{2}.$$

Ответ: 4,5.

Задача 5.12. Боковые ребра треугольной пирамиды $SABC$ с основанием ABC взаимно перпендикулярны, каждое из них равно $2\sqrt{3}$. Найдите высоту пирамиды, опущенную на ABC .

Ответ: 2.

Пример 5.13. Объем правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ равен 10, $SP : PC = 1 : 4$. Найдите объем треугольной пирамиды $PBCD$.

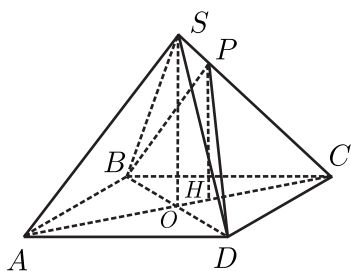


Рис. 33. К примеру 5.13.

РЕШЕНИЕ. Объем пирамиды $SBCD$ равен 5, причем основания пирамид $SBCD$ и $PBCD$ совпадают, поэтому отношение их объемов равно отношению их высот. $\triangle SOC \sim \triangle PHC$, поэтому

$$\frac{PH}{SO} = \frac{PC}{SC} \Rightarrow PH = \frac{4}{5}SO \Rightarrow V_{PBCD} = \frac{4}{5}V_{SBCD} = 4.$$

Ответ: 4.

Задача 5.14. [75] Объем правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ равен 12. Точка E — середина ребра SB . Найдите объем треугольной пирамиды $EABC$.

Ответ: 3.

Задача 5.15. [75] Объем куба равен 12. Найдите объем четырехугольной пирамиды, основанием которой является грань куба, а вершиной — центр куба.

Ответ: 2.

Пример 5.16. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания равна 1, а боковое ребро равно 2. Найдите площадь сечения, проходящего через середины ребер AC , AB и SB .

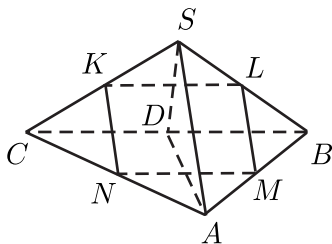


Рис. 34. К примеру 5.16.

РЕШЕНИЕ. LM — средняя линия $\triangle SBA$, следовательно, $LM \parallel SA$ (рис. 34). Поскольку плоскость SAC проходит через прямую $SA \parallel LM$, то плоскость сечения пересекает ее по прямой $KN \parallel SA$ (N — середина AC). Отсюда KN — средняя линия $\triangle SCA$. Следовательно, $KN \parallel LM$. Аналогично, $KL \parallel NM$. Отсюда $KLMN$ — параллелограмм. По утверждению 6

$$SA \perp BC \Rightarrow KN \perp BC \Rightarrow KN \perp MN.$$

Следовательно, $KLMN$ — прямоугольник, его площадь

$$S_{KLMN} = KN \cdot NM = 1 \cdot 0,5 = 0,5.$$

Ответ: 0,5.

Задача 5.17. [75] Ребра тетраэдра равны 1. Найдите площадь сечения, проходящего через середины четырех его ребер.
 Ответ: 0,25.

Задача 5.18. [75] В правильной четырехугольной пирамиде все ребра равны 1. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через середины боковых ребер.
 Ответ: 0,25.

Пример 5.19. [75] Объем параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ (рис. 35) равен 1,5. Найдите объем треугольной пирамиды $B_1 ABC$.

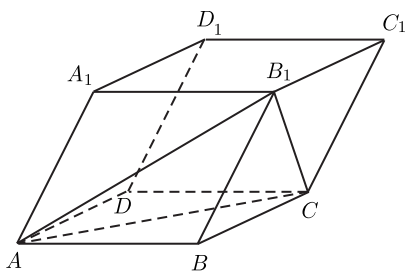


Рис. 35. К примеру 5.19.

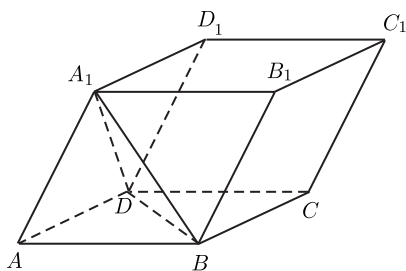


Рис. 36. К задаче 5.20.

РЕШЕНИЕ. Пусть h — высота параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, $V = 1,5$ — его объем (рис. 35). Объем пирамиды $B_1 ABC$ равен

$$V_{B_1 ABC} = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot h = \frac{1}{6} S_{ABCD} \cdot h = \frac{1}{6} V = 0,25.$$

Ответ: 0,25.

Задача 5.20. [75] Найдите объем параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ (рис. 36), если объем треугольной пирамиды $ABDA_1$ равен 3.

Ответ: 18.

5.3. Задачи для самостоятельного решения.

Обязательные задачи.

1. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания равна 1, а боковое ребро равно 2. Найдите площадь сечения, проходящего через середины ребер AC , AB и SB .
2. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ высота SO равна 13, диагональ основания BD равна 8. Точки K и M — середины ребер CD и BC соответственно. Найдите тангенс угла между плоскостью SMK и плоскостью основания ABC .

3. ЕГЭ-2020, (8). Найдите объем многогранника, вершинами которого являются точки A, C, A_1, B_1, C_1 правильной треугольной призмы A, B, C, A_1, B_1, C_1 , площадь основания которой равно 9, а боковое ребро равно 6.
4. [102] Боковое ребро правильной треугольной пирамиды равно 13, а одна из высот основания равна 7,5. Найдите высоту пирамиды.
5. [102] Высота основания правильной треугольной пирамиды в полтора раза больше высоты пирамиды. Найдите угол между боковым ребром и плоскостью основания пирамиды. Ответ дайте в градусах.
6. [102] Все ребра правильной четырехугольной пирамиды равны $8\sqrt{2}$. Найдите высоту пирамиды.
7. [102] Высота основания правильной треугольной пирамиды на 25% меньше ее бокового ребра. Найдите угол между боковым ребром и плоскостью основания пирамиды. Ответ дайте в градусах.
8. [102] Сторона основания $ABCD$ правильной четырехугольной пирамиды $PABCD$ равна $6\sqrt{2}$. Найдите расстояние от вершины D до плоскости PAC .
9. [103] Объем параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ равен 3 (рис. 37). Найдите объем треугольной пирамиды $AD_1 CB_1$.

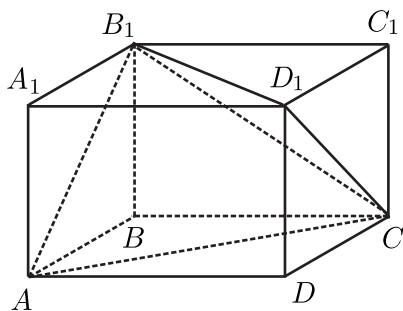


Рис. 37. К задаче 9

10. [103] В правильной треугольной пирамиде $SABCD$ точка P — середина ребра AB , S — вершина. Известно, что $SP = 4$, а площадь боковой поверхности равна 24. Найдите длину отрезка BC .
11. [103] В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с основанием ABC точка P — середина ребра AB , S — вершина.

Известно, что $DC = 4$, а площадь боковой поверхности равна 24. Найдите длину отрезка SP .

12. [3] Угол между боковой гранью и плоскостью основания правильной треугольной пирамиды равен 45° . Объем пирамиды равен $\frac{1}{3}$. Найдите длину стороны основания пирамиды.
13. [3] Основанием пирамиды является прямоугольник с длинами сторон 3 и 4. Боковая грань, проведенная к меньшей стороне прямоугольника, образует с плоскостью основания угол 45° . Найдите объем пирамиды.
14. [3] Сторона основания правильной шестиугольной пирамиды равна a . Найдите объем этой пирамиды, если известно, что ее боковая поверхность в десять раз больше основания.
15. [15] На сколько процентов уменьшится объем пирамиды, если одновременно уменьшить площадь ее основания и высоту на 20%?
16. [18] Вычислите объем правильного тетраэдра, если радиус окружности, описанной около его грани, равен R .
17. [18] В кубе, ребро которого равно a , центр верхней грани соединен с вершинами основания. Найдите полную поверхность полученной пирамиды.

§ 6. Цилиндр

6.1. Основные определения и утверждения.

1. Цилиндрическая поверхность — поверхность, получаемая при движении прямой (образующей L) параллельно самой себе, вдоль плоской кривой направляющей.
2. Цилиндр — это геометрическое тело, ограниченное цилиндрической поверхностью и двумя плоскостями (основаниями цилиндра). Далее под цилиндром будем понимать прямой круговой цилиндр, у которого направляющая — окружность радиуса, а основания перпендикулярны образующей.
3. Обозначим радиус основания цилиндра r , высоту h .
4. Объем цилиндра: $V = \pi r^2 h$.
5. Площадь боковой поверхности цилиндра: $S_{\text{бок}} = 2\pi r h$.
6. Площадь полной поверхности цилиндра: $S = 2\pi r h + 2\pi r^2$.

6.2. Примеры и задачи.

Пример 6.1. Образующая цилиндра равна 10, длина окружности основания равна 2π . Найдите объем цилиндра. В ответ запишите объем цилиндра, деленный на π .

РЕШЕНИЕ. В прямом цилиндре длина образующей равна высоте. Из условия следует, что радиус основания цилиндра равен 1.

$$V = \pi r^2 h = 10\pi.$$

Ответ: 10.

Задача 6.2. Объем цилиндра равен 8π . Найдите длину образующей, если радиус равен 4.

Ответ: 0,5.

Пример 6.3. [75] Объем первого цилиндра равен 64 м^3 . У второго цилиндра высота в 3 раза больше, а радиус основания в 4 раза меньше. Найдите объем второго цилиндра, ответ дайте в м^3 .

РЕШЕНИЕ. Пусть радиус первого цилиндра равен r , а высота h . Тогда объем второго цилиндра

$$V = \pi \left(\frac{r}{4}\right)^2 \cdot 3h = \pi r^2 h \cdot \frac{3}{16} = 64 \cdot \frac{3}{16} = 12 \text{ (м}^3\text{)}.$$

Ответ: 12.

Задача 6.4. [75] Объем первого цилиндра равен V . У второго цилиндра образующая в k раз меньше образующей первого цилиндра, а радиус основания — в k раз больше, чем у первого цилиндра. Найдите объем второго цилиндра.

Ответ: kV .

Задача 6.5. [75] В цилиндрическом сосуде уровень жидкости достигает 16 см. На какой высоте будет находиться уровень жидкости, если ее перелить во второй сосуд, диаметр которого в 2 раза больше первого? Ответ выразите в см.

Ответ: 4.

Пример 6.6. [75] В цилиндрический сосуд налили 6 см^3 воды. В воду полностью погрузили деталь. При этом уровень жидкости в сосуде увеличился в 1,5 раза. Найдите объем детали. Ответ выразите в см^3 .

РЕШЕНИЕ. Объем детали равен объему вытесненной ею жидкости. Объем вытесненной жидкости равен $\frac{1}{2}$ исходного объема, поэтому объем детали равен 3 см^3 .

Ответ: 3.

Задача 6.7. [75] В цилиндрический сосуд налили 2000 см^3 воды. Уровень воды при этом достигает высоты 12 см. В жидкость полностью погрузили деталь. При этом уровень

жидкости в сосуде поднялся на 9 см. Чему равен объем детали? Ответ выразите в см^3 .

Ответ: 1500.

Пример 6.8. [75] Площадь осевого сечения цилиндра равна 4. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра. В ответ запишите площадь боковой поверхности, деленную на π .

РЕШЕНИЕ. Осевым сечением цилиндра будет прямоугольник $ABCD$ (рис. 38), площадь которого равна $S_{ABCD} = AB \cdot BC$. Здесь AB — образующая цилиндра, BC — диаметр основания. Площадь боковой поверхности равна $S_{\text{бок}} = AB \cdot BC \cdot \pi = 4\pi$.

Ответ: 4.

Задача 6.9. Найдите площадь осевого сечения цилиндра, если радиус основания равен 3, а высота равна $\frac{2}{\pi}$.

Ответ: 12.

Пример 6.10. [75] Найдите объем V части цилиндра, изображенной на рис. 39. В ответе укажите $\frac{V}{\pi}$.

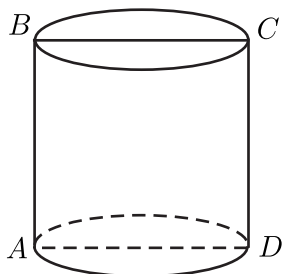


Рис. 38. К примеру 6.8.

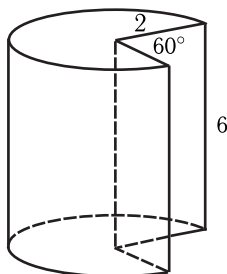


Рис. 39. К примеру 6.10.

РЕШЕНИЕ. Из исходного кругового цилиндра вырезана шестая часть, следовательно, $\frac{5}{6}$ от объема исходного цилиндра осталось:

$$V = \frac{5}{6} \cdot 4\pi \cdot 6 = 20\pi.$$

Ответ: 20.

Задача 6.11. Объем цилиндра равен 90. Из него вырезан сектор с углом 20° . Найдите объем вырезанной части.

Ответ: 5.

6.3. Задачи для самостоятельного решения. Обязательные задачи.

1. Объем цилиндра равен 18π , образующая равна 2. Найдите радиус основания.
2. Объем первого цилиндра равен 12 м^3 . У второго цилиндра высота в 3 раза больше, а радиус основания в 2 раза меньше. Найдите объем второго цилиндра, ответ дайте в м^3 .
3. [75] В цилиндрический сосуд налили 1200 см^3 воды. Уровень воды при этом достигает высоты 12 см. В жидкость полностью погрузили деталь. При этом уровень жидкости в сосуде поднялся на 10 см. Чему равен объем детали? Ответ выразите в см^3 .
4. Объем цилиндра равен 72. Из него вырезан сектор с углом 130° . Найдите объем оставшейся части.
5. ЕГЭ-2017, (8). В сосуд цилиндрической формы налили воду до уровня 32 см. Какого уровня достигнет вода, если перелить ее в другой сосуд цилиндрической формы, радиус основания которого в 4 раза больше радиуса основания первого сосуда? Ответ дайте в см.
6. [102] В цилиндрический сосуд налили 1800 см^3 воды. Уровень жидкости оказался равным 12 см. В воду полностью погрузили деталь. При этом уровень воды в сосуде поднялся на 2 см. Чему равен объем детали? Ответ выразите в см^3 .
7. Площадь полной поверхности цилиндра равна 100. Высоту и радиус основания уменьшили в два раза. Найдите площадь полной поверхности получившегося цилиндра.
8. Высоту цилиндра уменьшили в три раза. Во сколько раз нужно увеличить радиус основания, чтобы площадь боковой поверхности не изменилась.

§ 7. Конус

7.1. Основные определения и утверждения.

1. Конус — это геометрическое тело, которое образовано совокупностью всех лучей, исходящих из точки и пересекающих любую плоскую поверхность. В месте пересечения образуется основание конуса.

В данном разделе рассматривается прямой круговой конус, основанием которого является круг, вершина конуса проецируется в центр этого круга.

2. Образующей конуса называется любой отрезок, который соединяет вершину конуса с границей основания конуса. Образующая есть отрезок луча, выходящего из вершины конуса. Длина образующей (L) прямого кругового конуса через радиус R и высоту H :

$$L^2 = R^2 + H^2.$$

3. Направляющая конуса — это кривая, которая описывает контур основания конуса. Для прямого кругового конуса направляющая представляет собой окружность.
4. Объем кругового конуса:

$$V = \frac{1}{3}\pi HR^2,$$

где R — радиус основания, а H — высота конуса.

5. Площадь боковой поверхности прямого конуса:

$$S_{\text{бок}} = \pi RL.$$

6. Площадь полной поверхности прямого кругового конуса:

$$S = \pi RL + \pi R^2.$$

7.2. Примеры и задачи.

Пример 7.1. [75] Высота конуса $SO = 6$, образующая $SA = 10$ (рис. 40). Найдите его объем, деленный на π .

РЕШЕНИЕ. Из $\triangle ASO$ (рис. 40) по теореме Пифагора радиус основания конуса

$$AO = \sqrt{AS^2 - SO^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8.$$

Объем конуса $V = \frac{1}{3} \cdot 6 \cdot \pi \cdot 8^2 = 128\pi$.

Ответ: 128.

Задача 7.2. [75] Диаметр основания конуса равен 6, а угол при вершине осевого сечения равен 90° . Вычислите объем конуса, деленный на π .

Ответ: 9.

Задача 7.3. [75] Во сколько раз уменьшится объем конуса, если его высота уменьшится в 3 раза, а радиус основания останется прежним?

Ответ: 3.

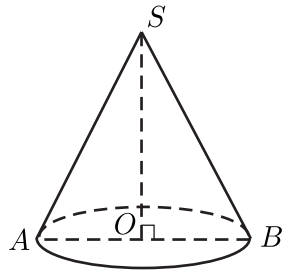


Рис. 40. К примеру 7.1.

Пример 7.4. [75] Во сколько раз увеличится площадь боковой поверхности конуса, если его образующая увеличится в 3 раза, а радиус основания останется прежним?

РЕШЕНИЕ. Площадь боковой поверхности конуса $S_{\text{бок}} = \pi RL$. Отсюда следует, что при увеличении образующей в 3 раза площадь боковой поверхности также увеличится в 3 раза.

Ответ: 3.

Задача 7.5. [75] Во сколько раз уменьшится площадь боковой поверхности конуса, если радиус его основания уменьшится в 1,5 раза, а образующая останется прежней?

Ответ: 1,5.

Пример 7.6. [75] В сосуде, имеющем форму конуса, уровень жидкости достигает $\frac{1}{2}$ высоты. Объем жидкости равен 70 мл. Сколько миллилитров жидкости нужно долить, чтобы полностью наполнить сосуд?

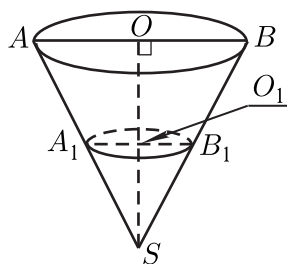


Рис. 41. К примеру 7.6.

РЕШЕНИЕ. Найдем объем конического сосуда (рис. 41):

$$V = \frac{1}{3} SO \cdot \pi \cdot OA^2.$$

При этом объем жидкости равен

$$V_1 = \frac{1}{3} SO_1 \cdot \pi \cdot O_1A_1^2.$$

Треугольники AOS и A_1O_1S подобны, поэтому $\frac{O_1A_1}{OA} = \frac{SO_1}{SO} = \frac{1}{2}$. Тогда

$$V_1 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} SO \cdot \pi \cdot \left(\frac{1}{2} OA\right)^2 = \frac{1}{8} V.$$

Следовательно, $V = 8V_1 = 560$ (мл), а долить необходимо $\frac{7}{8}V = 490$ (мл).

Ответ: 490.

Задача 7.7. В конический сосуд объема 54 мл налито 2 мл жидкости. Во сколько раз высота сосуда больше высоты уровня жидкости?

Ответ: 3.

Пример 7.8. [75] Найдите объем V части конуса, изображенной на рис. 42, где $SO = 12$, $OA = 9$, $\alpha = 90^\circ$. В ответе укажите $\frac{V}{\pi}$.

РЕШЕНИЕ. В силу того, что основание изображенной на рис. 42 фигуры составляет $\frac{3}{4}$ круга, то объем данной части конуса равен $\frac{3}{4}$ объема конуса:

$$V = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot 12 \cdot \pi \cdot 9^2 = 243\pi.$$

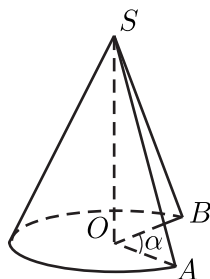


Рис. 42. К примеру 7.8.

Ответ: 243.

Задача 7.9. [75] Найдите объем V вырезанной части конуса, изображенного на рис. 42, где $SO = 27$, $OA = 12$, $\alpha = 60^\circ$. В ответе укажите $\frac{V}{\pi}$.

Ответ: 216.

Пример 7.10. [75] Найдите площадь осевого сечения конуса, радиус основания которого равен 3, а образующая равна 5 (рис. 43).

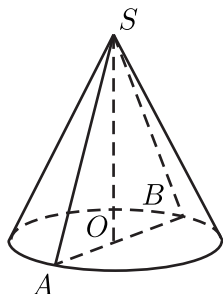


Рис. 43. К примеру 7.10.

РЕШЕНИЕ. В прямоугольном треугольнике SAO (рис. 43) $SA = 5$, $AO = 3$, следовательно, $SO = 4$. Площадь осевого сечения

$$S_{ASB} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot SO = 12.$$

Ответ: 12.

Задача 7.11. [75] Высота конуса равна 8, а длина образующей — 10. Найдите площадь осевого сечения этого конуса.

Ответ: 48.

Задача 7.12. Найдите площадь сечения конуса, перпендикулярного основанию и проходящего через хорду основания, ко-

торая опирается на центральный угол $\frac{2\pi}{3}$. Площадь осевого сечения конуса равна 16.

Ответ: $4\sqrt{3}$.

7.3. Задачи для самостоятельного решения.

Обязательные задачи.

1. [75] Найдите объем V конуса, образующая которого равна 2 и наклонена к плоскости основания под углом 30° . В ответе укажите $\frac{V}{\pi}$.
2. ЕГЭ-2019, (8). Во сколько раз изменится объем конуса, если его высота уменьшится в 12 раз, а радиус основания не изменится?
3. [75] Во сколько раз увеличится объем конуса, если радиус его основания увеличится в 1,5 раза, а высота останется прежней?
4. Высота конуса в 3 раза больше радиуса основания, а его объем равен 8π . Найдите площадь боковой поверхности конуса.
5. [75] Найдите объем V части конуса, изображенной на рис. 42, где $SO = 27$, $OA = 9$, $\alpha = 60^\circ$. В ответе укажите $\frac{V}{\pi}$.
6. Диаметр основания конуса равен 12, а длина образующей — 10. Найдите площадь осевого сечения этого конуса.
7. [103] В сосуде, имеющем форму конуса, уровень жидкости достигает $\frac{1}{4}$ высоты. Объем жидкости равен 5 мл. Сколько миллилитров жидкости надо долить, чтобы полностью наполнить сосуд?
8. ЕГЭ-2019, (8). Цилиндр и конус имеют общие основание и высоту. Объем конуса равен 25. Найдите объем цилиндра.

§ 8. Шар

8.1. Основные определения и утверждения.

1. Сфера (поверхность шара) — это совокупность всех точек в трехмерном пространстве, которые находятся на одинаковом расстоянии R от одной точки, называемой центром сферы. R называется радиусом сферы.
2. Шар — это совокупность всех точек в трехмерном пространстве, расстояние от которых не превышает определенного расстояния R до точки, называемой центром шара

(совокупность всех точек трехмерного пространства ограниченных сферой). R называется радиусом шара.

3. Объем шара $V = \frac{4}{3}\pi R^3$, где R — радиус шара.

4. Площадь сферы $S = 4\pi R^2$, где R — радиус сферы.

5. Центральное сечение шара радиуса R — сечение, проходящее через центр шара, — круг радиуса R . Его площадь $S = \pi R^2$.

8.2. Примеры и задачи.

Пример 8.1. [75] *Площадь центрального сечения шара равна 3. Найдите площадь поверхности шара.*

РЕШЕНИЕ. Площадь центрального сечения шара $S_0 = \pi R^2 = 3$, площадь сферы $S = 4\pi R^2 = 4 \cdot 3 = 12$.

Ответ: 12.

Задача 8.2. *Площадь центрального сечения первого шара равна 1. Найдите площадь поверхности второго шара, у которого радиус больше радиуса первого шара в 3 раза.*

Ответ: 36.

Пример 8.3. [75] *Радиусы трех шаров равны 6, 8 и 10. Найдите радиус шара, объем которого равен сумме их объемов.*

РЕШЕНИЕ. Сумма объемов трех шаров равна

$$\frac{4}{3}\pi \cdot 6^3 + \frac{4}{3}\pi \cdot 8^3 + \frac{4}{3}\pi \cdot 10^3 = \frac{4}{3}\pi (6^3 + 8^3 + 10^3) = \frac{4}{3}\pi \cdot 12^3.$$

Следовательно, радиус шара равен 12.

Ответ: 12.

Задача 8.4. *Радиусы трех шаров равны 3, 4 и 12. Найдите радиус шара, площадь поверхности которого равна сумме площадей поверхностей данных трех шаров.*

Ответ: 13.

8.3. Задачи для самостоятельного решения.

Обязательные задачи.

1. [75] Даны два шара. Радиус первого шара в 2 раза больше радиуса второго. Во сколько раз площадь поверхности первого шара больше площади поверхности второго?
2. Радиусы двух шаров равны 6 и 8. Найдите радиус шара, площадь поверхности которого равна сумме площадей поверхностей двух данных шаров.
3. [103] Площадь поверхности шара равна 8. Найдите площадь сечения плоскостью, проходящей через центр шара.

4. [103] Бетонный шар весит 0,5 тонны. Сколько тонн будет весить шар вдвое большего радиуса, сделанный из такого же бетона?

§ 9. Комбинации тел

9.1. Основные определения и утверждения.

1. Если в прямоугольный параллелепипед вписан шар, то прямоугольный параллелепипед — куб.
2. Если шар вписан в куб, то сторона куба равна диаметру шара.
3. Если куб вписан в шар, то диагональ куба равна диаметру шара.
4. Если параллелепипед вписан в шар, то этот параллелепипед — прямоугольный.
5. Если призма вписана в шар, то она прямая.
6. Если цилиндр вписан в прямоугольный параллелепипед, то в основании параллелепипеда лежит квадрат.
7. Если шар вписан в цилиндр, то радиус основания цилиндра равен радиусу шара, а высота равна диаметру шара.
8. Если призма вписана в цилиндр, то высота призмы равна высоте цилиндра, а многоугольник, лежащий в основании призмы, вписан в основание цилиндра.
9. Если пирамида вписана в конус, то их высоты равны.
10. Если пирамида описана около конуса, то их высоты равны.

9.2. Примеры и задачи.

Пример 9.1. *Объем прямоугольного параллелепипеда, описанного около сферы, равен 27. Найдите радиус сферы.*

РЕШЕНИЕ. Если сфера вписана в прямоугольный параллелепипед, то это куб, причем ребро куба равно диаметру сферы. Объем куба равен 27, следовательно, ребро куба равно 3. Отсюда радиус сферы равен 1,5.

Ответ: 1,5.

Задача 9.2. *Шар радиуса 2 вписан в прямоугольный параллелепипед. Найдите объем параллелепипеда.*

Ответ: 64.

Задача 9.3. [75] *Куб вписан в шар радиуса $\sqrt{3}$. Найдите объем куба.*

Ответ: 8.

Задача 9.4. [75] *Прямоугольный параллелепипед описан около единичной сферы. Найдите площадь его поверхности.*

Ответ: 24.

Пример 9.5. [75] Шар вписан в цилиндр. Площадь полной поверхности цилиндра равна 18. Найдите площадь поверхности шара.

РЕШЕНИЕ. Согласно утверждению 7 радиусы шара и основания цилиндра равны, а высота цилиндра равна диаметру шара. Отсюда площадь поверхности цилиндра с радиусом основания r и высотой $2r$ равна

$$S_0 = 2\pi r \cdot 2r + 2 \cdot \pi r^2 = 6\pi r^2.$$

Следовательно, площадь поверхности шара равна

$$S = 4\pi r^2 = \frac{2}{3}S_0 = 12.$$

Ответ: 12.

Задача 9.6. Цилиндр описан около шара радиуса 3. Найдите площадь S полной поверхности цилиндра. В ответе укажите $\frac{S}{\pi}$.

Ответ: 54.

Пример 9.7. [75] Цилиндр описан около шара. Объем цилиндра равен 33. Найдите объем шара.

РЕШЕНИЕ. Согласно утверждению 7 радиусы шара и основания цилиндра равны, а высота цилиндра равна диаметру шара. Отсюда объем цилиндра равен

$$V_{\text{цил}} = \pi r^2 \cdot 2r = 2\pi r^3 = 33 \iff \pi r^3 = \frac{33}{2}.$$

Отсюда объем шара $V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3} \cdot \frac{33}{2} = 22$.

Ответ: 22.

Задача 9.8. [75] Цилиндр описан около шара. Объем шара равен 24. Найдите объем цилиндра.

Ответ: 36.

Пример 9.9. Конус вписан в шар. Высота конуса в 1,5 раза больше радиуса шара. Найдите объем конуса, если объем шара равен 64.

РЕШЕНИЕ. На рис. 45 представлено осевое сечение конуса, вписанного в шар (рис. 44). Рассмотрим $\triangle OQB$. В этом треугольнике OB равно радиусу шара R . По условию $SQ = \frac{3}{2}R$, а $SO = R$,

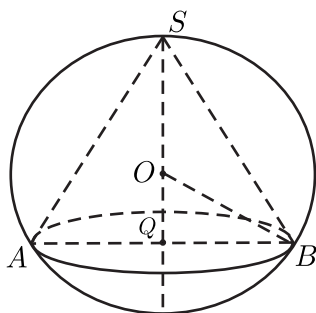


Рис. 44. К примеру 9.9.

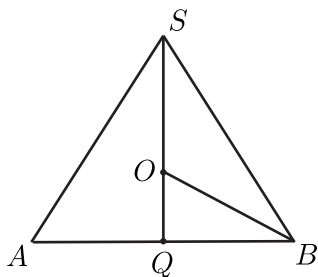


Рис. 45. К примеру 9.9.

следовательно, $OQ = \frac{R}{2}$. Тогда $QB = R\frac{\sqrt{3}}{2}$. Отсюда объем конуса равен

$$V = \frac{1}{3} \cdot SQ \cdot \pi \cdot QB^2 = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2}R \cdot \pi \cdot \frac{3}{4}R^2 = \frac{3}{8}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi R^3 \cdot \frac{9}{32} = 18.$$

Ответ: 18.

Задача 9.10. [75] Конус вписан в шар. Радиус основания конуса равен радиусу шара. Объем конуса равен 6. Найдите объем шара.

Ответ: 24.

Пример 9.11. [75] В основании прямой призмы лежит прямоугольный треугольник с катетами 6 и 8. Боковые ребра равны $\frac{5}{\pi}$. Найдите объем цилиндра, описанного около этой призмы.

РЕШЕНИЕ. Прямоугольный треугольник вписан в круг (основание цилиндра), поэтому диаметр круга равен гипотенузе $c = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$. Отсюда объем цилиндра $V = \frac{\pi \cdot 10^2}{4} \cdot \frac{5}{\pi} = 125$.

Ответ: 125.

Задача 9.12. В основании прямой призмы лежит прямоугольный треугольник с катетами 12 и 5. Боковые ребра равны $\frac{4}{\pi}$. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра, описанного около этой призмы.

Ответ: 52.

Пример 9.13. [75] Найдите площадь боковой поверхности правильной шестиугольной призмы, описанной около цилиндра, радиус основания которого равен $\sqrt{3}$, а высота равна 2.

РЕШЕНИЕ. Треугольник OB_1C_1 будет равносторонним (рис. 46), его высота равна радиусу вписанного в основание круга. Отсюда

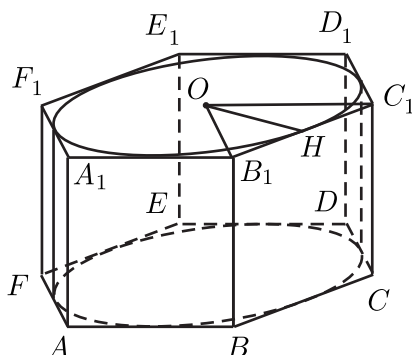


Рис. 46. К примеру 9.13.

$$B_1C_1 = \frac{2}{\sqrt{3}}OH = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{3} = 2. \text{ Следовательно, площадь боковой}$$

поверхности $6 \cdot 2 \cdot 2 = 24$.

Ответ: 24.

Задача 9.14. [75] Найдите площадь боковой поверхности правильной треугольной призмы, вписанной в цилиндр, радиус основания которого равен $2\sqrt{3}$, а высота равна 2.

Ответ: 36.

Пример 9.15. В призму, основанием которой служит прямоугольный треугольник с гипотенузой 5, вписан цилиндр, диаметр основания которого равен 2, а высота 7. Найдите площадь полной поверхности призмы.

РЕШЕНИЕ. Основание цилиндра — вписанный в прямоугольный треугольник круг. Из курса планиметрии известно, что радиус вписанного в прямоугольный треугольник круга равен $r = \frac{a+b-c}{2}$, где a и b — катеты, c — гипотенуза прямоугольного треугольника. Отсюда

$$\begin{cases} 1 = \frac{a+b-5}{2}, \\ a^2 + b^2 = 25. \end{cases}$$

Решая систему, получаем $a = 3$, $b = 4$. Тогда площадь S полной поверхности призмы равна

$$S = ab + (a + b + c) \cdot h = 3 \cdot 4 + (3 + 4 + 5) \cdot 7 = 96.$$

Ответ: 96.

Задача 9.16. [75] Найдите площадь боковой поверхности правильной треугольной призмы, описанной около цилиндра, радиус основания которого равен $\sqrt{3}$, а высота равна 2.

Ответ: 36.

Пример 9.17. Конус описан около правильной треугольной пирамиды со стороной основания $a = 6$ и высотой $h = 5$. Найдите его объем V . В ответ запишите $\frac{V}{\pi}$.

РЕШЕНИЕ. Конус описан около пирамиды, поэтому по утверждению 9 их высоты равны. Треугольное основание пирамиды вписано в основание конуса, отсюда радиус основания конуса равен $r = \frac{a}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$. Объем конуса

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi \cdot 12 \cdot 5 = 20\pi.$$

Ответ: 20.

Задача 9.18. [75] Конус описан около правильной четырехугольной пирамиды со стороной основания 4 и высотой 6. Найдите его объем, деленный на π .

Ответ: 16.

Пример 9.19. [75] Во сколько раз объем конуса, описанного около правильной четырехугольной пирамиды, больше объема конуса, вписанного в эту пирамиду?

РЕШЕНИЕ. По утверждениям 9 и 10 высоты конусов совпадают с высотой пирамиды, поэтому отношение их объемов равно отношению площадей оснований, которое, в свою очередь, равно отношению квадратов диаметров. Диаметр основания вписанного конуса равен стороне квадрата — основания пирамиды, а диаметр описанного круга равен диагонали квадрата. Диагональ квадрата относится к стороне квадрата как $\sqrt{2}$. Следовательно, объем описанного конуса в 2 раза больше объема вписанного.

Ответ: 2.

Задача 9.20. Во сколько раз объем конуса, описанного около правильной треугольной пирамиды, больше объема конуса, вписанного в эту пирамиду?

Ответ: 4.

Пример 9.21. [75] Вершина A_1 куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ с ребром 1,6 является центром сферы, проходящей через точку A . Найдите площадь S части сферы, содержащейся внутри куба. В ответе запишите величину $\frac{S}{\pi}$.

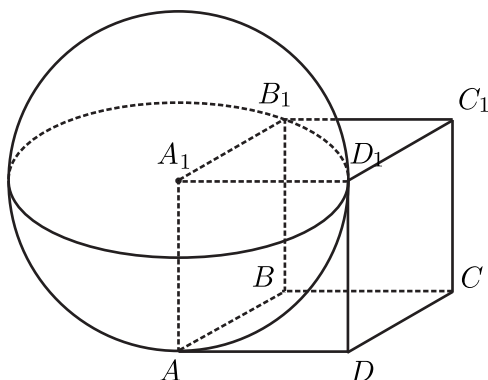


Рис. 47. К примеру 9.21.

РЕШЕНИЕ. Ребро куба равно радиусу сферы (рис. 47), поэтому в кубе содержится $\frac{1}{8}$ часть сферы и, соответственно, $\frac{1}{8}$ ее поверхности:

$$\frac{1}{8}S = \frac{1}{8} \cdot 4\pi(1,6)^2 = 1,28\pi.$$

Ответ: 1,28.

Задача 9.22. [75] Середина ребра куба со стороной 1,9 является центром шара радиуса 0,95 (рис. 48). Найдите площадь S части поверхности шара, лежащей внутри куба. В ответе запишите $\frac{S}{\pi}$.

Ответ: 0,9025.

Задача 9.23. Середина ребра куба со стороной 3 является центром шара радиуса 1,5. Найдите часть объема куба V , не имеющую общих точек с шаром. В ответе запишите $\frac{V}{24 - \pi}$.

Ответ: 1,125.

Пример 9.24. [75] Объем тетраэдра равен 19. Найдите объем многогранника, вершинами которого являются середины ребер данного тетраэдра (рис. 49).

РЕШЕНИЕ. Полученный многогранник, называемый октаэдром, состоит из восьми одинаковых граней — равных треугольников (рис. 49). Найдём объем той части тетраэдра, которая не принадлежит октаэдру. Это четыре одинаковых правильных тетраэдра, объем каждого составляет $\frac{1}{8}$ объема исходного тетраэдра, а их суммарный объем равен половине объема тетраэдра, то есть $\frac{19}{2}$.

Ответ: 9,5.

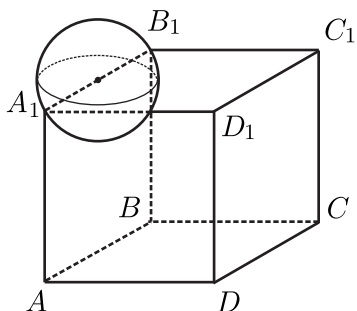


Рис. 48. К задаче 9.22.

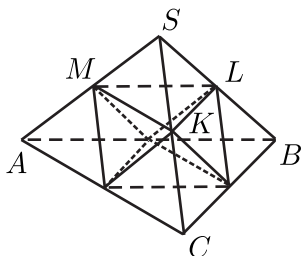


Рис. 49. К примеру 9.24.

Задача 9.25. [75] *Площадь поверхности тетраэдра равна 12. Найдите площадь поверхности многогранника, вершинами которого являются середины ребер данного тетраэдра (рис. 49).*

Ответ: 6.

9.3. Задачи для самостоятельного решения.

Обязательные задачи.

1. ЕГЭ-2013, основная волна, №8.
Прямоугольный параллелепипед описан около сферы радиуса 17. Найдите его объем.
2. Прямоугольный параллелепипед описан около сферы радиуса 3. Найдите его объем.
3. [103] Шар, объем которого равен 14π вписан в куб. Найдите объем куба.
4. [103] Шар вписан в цилиндр. Площадь поверхности шара равна 78. Найдите площадь полной поверхности цилиндра.
5. Цилиндр описан около шара и вписан в другой шар. Найдите отношение площади поверхности большего шара к площади поверхности меньшего.
6. [75] Конус вписан в шар. Радиус основания конуса равен радиусу шара. Объем шара равен 28. Найдите объем конуса.
7. Конус описан около правильной треугольной пирамиды с боковым ребром 2. Косинус угла наклона этого ребра к плоскости основания пирамиды равен 0,25. Найдите площадь S полной поверхности конуса. В ответ запишите $\frac{S}{\pi}$.
8. [103] Объем цилиндра равен 12. Чему равен объем конуса, который имеет такое же основание и такую же высоту, как и данный цилиндр.

9. [103] Цилиндр и конус имеют общее основание и высоту. Высота цилиндра равна радиусу основания. Площадь боковой поверхности конуса равна $41\sqrt{2}$. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.
10. Середина ребра куба со стороной 6 является центром шара радиуса 3. Найдите площадь поверхности S и объем той части шара V , которая не содержится в кубе. В ответе укажите $\frac{S}{\pi}$ и $\frac{V}{\pi}$.
11. Куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ вписан в шар с центром в точке O . Найдите угол между радиусами OA и OA_1 .
12. [18] Металлический шар радиуса R переплавлен в конус, боковая поверхность которого в 3 раза больше площади основания. Вычислите высоту конуса.

Дополнительные задачи.

1. [3] Около шара описана правильная четырехугольная пирамида, высота которой вчетверо больше диаметра шара. Найдите отношение объема шара к объему пирамиды.

§ 10. Соотношения между углами в правильных пирамидах

10.1. Основные углы. Среди углов, которые можно рассматривать в правильной пирамиде (рис. 50, рис. 51), наиболее часто встречаются в задачах:

1. угол наклона бокового ребра к плоскости основания пирамиды, его величину условимся обозначать буквой α ;
2. угол наклона боковой грани к плоскости основания β ;
3. плоский угол при вершине пирамиды γ ;
4. двугранный угол при боковом ребре пирамиды δ .

Зная величину любого из этих углов, можно определить все остальные (иными словами, тригонометрические функции этих углов можно выразить через тригонометрические функции данного угла).

10.2. Четырехугольная пирамида. Рассмотрим правильную четырехугольную пирамиду (рис. 50). Найдём углы β , γ , δ по заданному углу α .

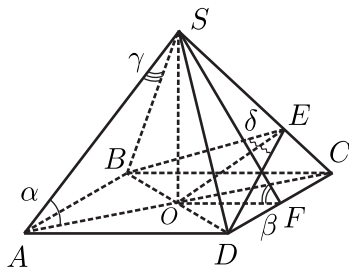


Рис. 50.

Пусть сторона квадрата в основании пирамиды равна a . Вершина пирамиды проецируется в точку O — точку пересечения диагоналей, поэтому $AO = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, а из прямоугольного $\triangle ASO$ имеем

$$SO = AO \cdot \operatorname{tg} \alpha = \frac{a\sqrt{2}}{2} \operatorname{tg} \alpha, \quad AS = \frac{AO}{\cos \alpha} = \frac{a}{\sqrt{2} \cos \alpha}.$$

Угол β найдем из прямоугольного $\triangle SOF$, где SF — апофема, $OF = \frac{a}{2}$. Угол SFO по определению является линейным углом двугранного угла между боковой гранью и плоскостью основания, $\angle SFO = \beta$. Тогда

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{SO}{OF} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2} \operatorname{tg} \alpha}{\frac{a}{2}} = \sqrt{2} \operatorname{tg} \alpha.$$

Найдем угол γ из равнобедренного $\triangle DSC = \triangle ASB$, $SD = SC$. При этом SF является биссектрисой, медианой и высотой треугольника. Тогда

$$\sin \frac{\gamma}{2} = \frac{DF}{SD} = \frac{\frac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{2}}{2 \cos \alpha}}}{\frac{a}{\sqrt{2}}} = \frac{\cos \alpha}{\sqrt{2}}.$$

Найдем угол δ из равнобедренного треугольника $\triangle BDE$ ($BE \perp SC$, $DE \perp SC$ по определению линейного угла двугранного угла между боковыми гранями):

$$\sin \frac{\delta}{2} = \frac{OD}{DE}, \quad \text{где } OD = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Найдем DE из прямоугольного $\triangle SDE$ ($DE \perp SC$):

$$DE = SD \sin \gamma = \frac{a \sin \gamma}{\sqrt{2} \cos \alpha}.$$

Тогда

$$\sin \frac{\delta}{2} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{\frac{a\sqrt{2}}{2 \cos \alpha} \sin \gamma} = \frac{\cos \alpha}{\sin \gamma}.$$

Так как

$$\sin \frac{\gamma}{2} = \frac{\cos \alpha}{\sqrt{2}},$$

то

$$\sin \gamma = 2 \sin \frac{\gamma}{2} \cos \frac{\gamma}{2} = 2 \frac{\cos \alpha}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{2 - \cos^2 \alpha}}{\sqrt{2}}.$$

Тогда после подстановки $\sin \gamma$ получаем

$$\sin \frac{\delta}{2} = \frac{1}{\sqrt{2 - \cos^2 \alpha}}.$$

Аналогично можно при одном заданном угле из углов $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ можно найти остальные. Например, пусть задан угол δ , найдем угол α . Рассмотрим $\triangle BDE$, где $BE \perp SC$ и $DE \perp SC$. Следовательно, SC является перпендикуляром к плоскости BDE , а, значит, и любой прямой, лежащий в этой плоскости. Отсюда $OE \perp SC$, и угол α найдем из прямоугольного треугольника OEC . В этом треугольнике $OC = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, а сторона OE ищется из прямоугольного $\triangle OED$: $OE = \frac{a\sqrt{2}}{2} \operatorname{ctg} \frac{\delta}{2}$. Тогда

$$\sin \alpha = \frac{OE}{OC} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2} \operatorname{ctg} \frac{\delta}{2}}{\frac{a\sqrt{2}}{2}} = \operatorname{ctg} \frac{\delta}{2}.$$

Когда известен угол α , можно по нему найти углы β и γ , как было показано выше.

10.3. Треугольная пирамида. Теперь рассмотрим правильную треугольную пирамиду (рис. 51). Пусть задан угол α между боковым ребром AS и плоскостью основания ABC пирамиды $SABC$. Найдем остальные углы: β — двугранный угол между боковой гранью и основанием, γ — угол между боковыми ребрами и δ — двугранный угол между боковыми гранями. Пусть сторона правильного треугольника AB равна a . Вершина пирамиды S проецируется в точку O — центр треугольника (точку пересечения биссектрис, медиан и высот), поэтому, $OD = \frac{a\sqrt{3}}{6}$, $AO = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. Тогда из $\triangle ASO$ имеем $SO = AO \cdot \operatorname{tg} \alpha = \frac{a\sqrt{3}}{3} \operatorname{tg} \alpha$, $AS = \frac{a}{\sqrt{3} \cos \alpha}$.

Угол β найдем из прямоугольного $\triangle SOD$, где SD — апофема. Угол $\beta = \angle SDO$ по определению является линейным углом дву-

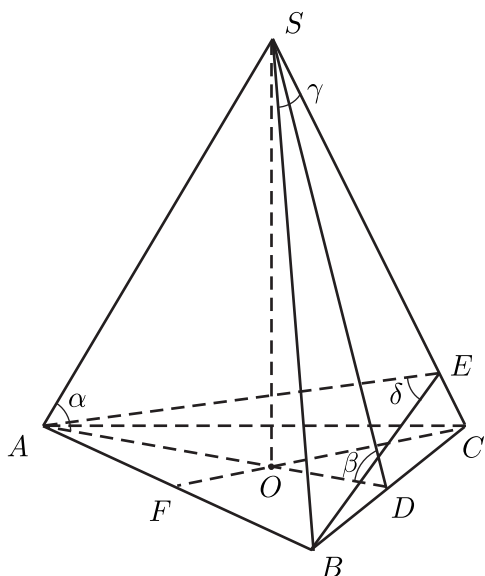


Рис. 51.

гранного угла между боковой гранью и плоскостью основания. Тогда

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{SO}{OD} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{3} \operatorname{tg} \alpha}{\frac{a\sqrt{3}}{6}} = 2 \operatorname{tg} \alpha.$$

Найдем угол γ из равнобедренного $\triangle BSC = \triangle ASB$, $SB = SC$. При этом SD является биссектрисой, медианой и высотой треугольника. Тогда

$$\sin \frac{\gamma}{2} = \frac{BD}{SB} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{\cos \alpha}} = \frac{\sqrt{3} \cos \alpha}{2}.$$

Найдем угол δ из равнобедренного треугольника $\triangle AEB$ ($AE \perp SC$, $BE \perp SC$ по определению линейного угла двугранного угла между боковыми гранями). Пусть точка F — середина AB , $AF = FB$.

$$\sin \frac{\delta}{2} = \frac{FB}{BE}, \text{ где } BE = BS \cdot \sin \gamma.$$

Тогда

$$\sin \frac{\delta}{2} = \frac{\frac{a}{2}}{a\sqrt{3} \cos \alpha} \sin \gamma = \frac{\sin \gamma}{2\sqrt{3} \cos \alpha}.$$

10.4. Примеры и задачи.

Пример 10.1. В правильной треугольной пирамиде боковое ребро равно b , сторона основания равна a . Найдите двугранный угол при основании пирамиды.

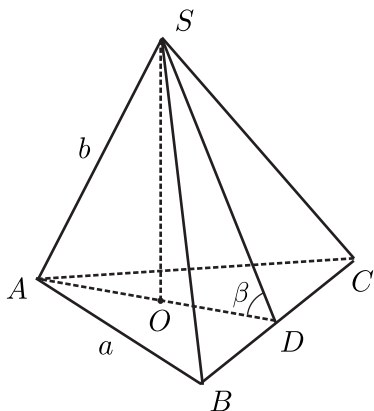


Рис. 52. К примеру 10.1.

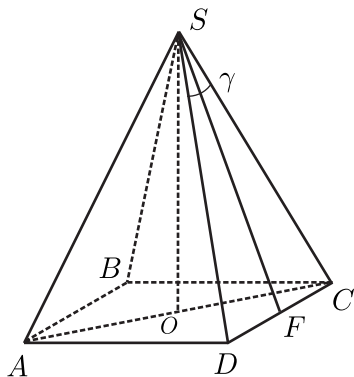


Рис. 53. К примеру 10.3.

РЕШЕНИЕ. Пусть AD — высота в правильном $\triangle ABC$ (рис. 52). Рассмотрим $\triangle OSD$. В этом треугольнике угол β — линейный угол искомого двугранного угла (рис. 52),

$$SD = \sqrt{SB^2 - BD^2} = \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}}, \quad OD = \frac{a}{2\sqrt{3}}.$$

Тогда

$$\cos \beta = \frac{OD}{SD} = \frac{a}{2\sqrt{3} \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}}} = \frac{a}{\sqrt{3(4b^2 - a^2)}}.$$

Ответ: $\arccos \frac{a}{\sqrt{3(4b^2 - a^2)}}$.

Задача 10.2. В правильной четырехугольной пирамиде боковое ребро равно b , сторона основания равна a . Найдите двугранный угол при основании пирамиды.

Ответ: $\arccos \frac{a}{\sqrt{4b^2 - a^2}}$.

Пример 10.3. В правильной четырехугольной пирамиде плоский угол при вершине равен γ , а высота пирамиды равна h . Найдите площадь боковой грани.

РЕШЕНИЕ. Площадь боковой грани, то есть равнобедренного

$\triangle SDC$, равна $S_{SDC} = \frac{1}{2} SC^2 \cdot \sin \gamma$ (рис. 53). Рассмотрим $\triangle SFC$: $FC = SC \cdot \sin \frac{\gamma}{2}$. Тогда $OC = \sqrt{2} FC = \sqrt{2} \cdot SC \cdot \sin \frac{\gamma}{2}$. В $\triangle SOC$ запишем теорему Пифагора:

$$SC^2 = SO^2 + OC^2 \iff SC^2 = h^2 + 2 \cdot SC^2 \cdot \sin^2 \frac{\gamma}{2} \iff$$

$$SC^2 = \frac{h^2}{1 - 2 \sin^2 \frac{\gamma}{2}} = \frac{h^2}{\cos \gamma}.$$

Отсюда

$$S_{SCD} = \frac{1}{2} \cdot \frac{h^2}{\cos \gamma} \cdot \sin \gamma = \frac{h^2}{2} \operatorname{tg} \gamma.$$

Ответ: $\frac{h^2}{2} \operatorname{tg} \gamma$.

Задача 10.4. В правильной треугольной пирамиде площадь боковой грани равна S , а плоский угол при вершине равен α . Найдите высоту пирамиды.

Ответ: $\sqrt{\frac{2S}{3 \sin \alpha} (1 + 2 \cos \alpha)} = \sqrt{\frac{2S}{\sin \alpha} \left(\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \frac{1}{3} \sin^2 \frac{\alpha}{2} \right)}$.

Пример 10.5. [3] Отрезок прямой, соединяющей центр основания правильной треугольной пирамиды с серединой бокового ребра, равен стороне основания. найдите угол между смежными боковыми гранями пирамиды.

РЕШЕНИЕ. Пусть сторона основания пирамиды равна a . От-

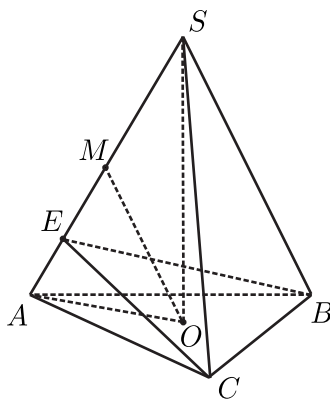


Рис. 54. К примеру 10.5.

резок SO является высотой правильной треугольной пирамиды (рис. 54). Поскольку OM — медиана прямоугольного тре-

угольника AOS , она равна половине гипотенузы SA : $OM = a$, $AS = 2a$ (рис. 55). Запишем площадь равнобедренного $\triangle ASC$ двумя способами (обозначим $EC = h$):

$$\frac{1}{2} \cdot 2a \cdot h = \frac{1}{2} \cdot a \cdot H \iff a \cdot h = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{\sqrt{15}}{2}a \iff h = \frac{\sqrt{15}}{4}a.$$

Из равнобедренного $\triangle CEB$ найдем искомый угол φ ($\angle CEB$):

$$a^2 = 2h^2 - 2h^2 \cos \varphi \iff a^2 = 2 \cdot \frac{15}{16}a^2(1 - \cos \varphi) \iff \cos \varphi = \frac{7}{15}.$$

Ответ: $\arccos \frac{7}{15}$.

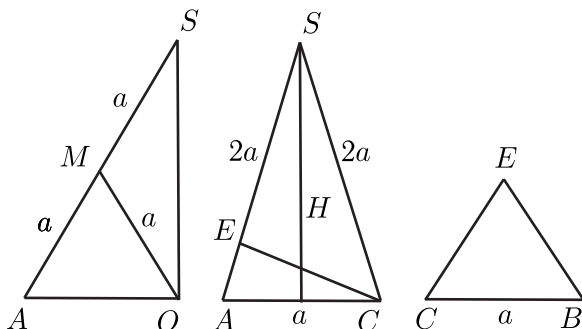


Рис. 55. К примеру 10.5.

Задача 10.6. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ с основанием $ABCD$ точка O — середина отрезка AC . В треугольнике SOC высота, проведенная из вершины O , совпадает с биссектрисой. Найдите

- плоский угол при вершине пирамиды;
- угол между боковой гранью и основанием.

Ответ: 60° , 45° .

10.5. Задачи для самостоятельного решения.

Обязательные задачи.

- [3] Найдите двугранный угол между боковыми гранями правильной треугольной пирамиды, если двугранный угол, образуемый боковой гранью с основанием, равен α .
- [3] Найдите объем V и площадь боковой поверхности S правильной четырехугольной пирамиды, у которой высота равна $\sqrt{3}$, а плоский угол при вершине равен 30° .

3. [3] Найдите площадь поверхности правильной четырехугольной пирамиды, если ее апофема равна m , а угол при вершине равен α .
4. [15] В правильной треугольной пирамиде боковое ребро равно 8, а плоский угол при вершине равен 45° . Найдите полную поверхность пирамиды.
5. [15] Найдите объем правильной треугольной пирамиды, боковые ребра которой наклонены к плоскости основания под углом α и удалены от середины противоположной стороны основания на расстояние m .
6. [15] Плоский угол при вершине правильной четырехугольной пирамиды равен θ , а длина высоты — H . Найдите объем пирамиды.
7. В правильной треугольной пирамиде боковое ребро равно b , высота пирамиды h . Найдите двугранный угол между боковыми гранями.
8. Основанием треугольной пирамиды является равнобедренный треугольник со сторонами $AB = BC = b$ и $AC = a$. Высота пирамиды равна h . Все ребра наклонены к плоскости основания под одинаковым углом. Найдите этот угол.
9. В правильном тетраэдре найдите: а) угол наклона бокового ребра к основанию; б) двугранный угол между гранями.
10. Площадь боковой грани правильной четырехугольной пирамиды равна 8, а двугранный угол этой грани с основанием 60° . Найдите сторону основания.
11. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ $\angle ASC = 60^\circ$. Найдите плоский угол при вершине.
12. Площадь боковой поверхности правильной четырехугольной пирамиды в 4 раза больше площади основания. Найдите двугранный угол при основании пирамиды.

Список литературы

1. Г.Н. Медведев. Задачи вступительных экзаменов по математике на физическом факультете МГУ 1971-2006 гг. М.: Комкнига, 2007.
2. О.Ю. Черкасов, А.Г. Якушев. Математика для поступающих в вузы. М. 1996.
3. 3000 Конкурсных задач по математике, Москва, 1998.
4. Вступительные экзамены по математике 2000-2002. Задачи с ответами и решениями. Варианты письменных и устных экзаменов по материалам вступительных испытаний в МГУ имени М.В.Ломоносова. Москва, 2003.
5. Математика. Задачи вступительных экзаменов. Москва, УНЦ ДО, 2004.
6. М.Л.Галицкий, А.М.Гольдман, Л.И.Званич. Сборник задач по алгебре. Учебное пособие для 8-9 классов с углубленным изучением математики. М., Просвещение, 2002.
7. Г.М.Фихтенгольц. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т.2. М. Наука, 1969.
8. Б.П.Демидович Сборник задач и упражнений по математическому анализу. М., АСТ, 2005.
9. В.Ф.Бутузов, Н.Ч.Крутицкая, Г.Н.Медведев, А.А.Шишкин Математический анализ в вопросах и задачах. М. Физматлит, 2002.
10. Л.В.Тарасов, А.Н.Тарасова Вопросы и задачи по физике (Анализ характерных ошибок поступающих во втузы). М. Высшая школа, 1990.
11. В.В.Ткачук Математика — абитуриенту М., Издательство МЦНМО, 2005.
12. П.И.Горнштейн, В.Б.Полонский, М.С.Якир Задачи с параметрами М.: Илекса, 2002.
13. В.В.Амелькин, В.Л.Рабцевич Задачи с параметрами: Справочное пособие по математике. Минск. Асар. 2002.
14. С.А.Шестаков, Е.В.Юрченко Уравнения с параметром. М.: Слог. 1993.
15. Л.М.Лужина, В.Л.Натяганов Сборник задач по геометрии и тригонометрии М.: УНЦ ДО, 2003.
16. С.Н.Олехник, М.К.Потапов, П.И.Пасиченко Уравнения и неравенства. Нестандартные методы решения. М.: Факториал, 1997.
17. В.М.Говоров, П.Т.Дыбов, Н.В.Мирошин, С.Ф.Смирнова Сборник конкурсных задач по математике для поступающих в вузы. М.: ОНИКС 21 век, 2003.
18. Сборник задач по математике для поступающих в вузы. Под редакцией М.И.Сканави М.: ОНИКС 21 век, 2005.
19. М.В.Лурье Тригонометрия. М.: УНЦ ДО, 2004.
20. М.В.Федотов, Е.Н.Хайлов Задачи устного экзамена по математике М.: факультет ВМиК МГУ, 2000.
21. М.В.Лурье Геометрия. М.: УНЦ ДО, 2002.
22. В.Л.Натяганов, Л.М.Лужина Методы решения задач с параметрами М.: Изд-во МГУ, 2003.
23. Ф.Ф.Нагибин, Е.С.Канин Математическая шкатулка М.: Просвещение, 1988.
24. М.В.Лурье Задачи на составление уравнений. М.: УНЦ ДО, 2002.
25. Л.С.Атанасян, В.Ф.Бутузов, С.Б.Кадомцев, Э.Г.Позняк Геометрия: Учебник для 7-9 классов общеобразовательных учреждений. М.: Просвещение, 1998.

26. С.Романов, И.Шарыгин Алгебраический метод решения геометрических задач // Квант, 1975, №11.
27. А.Мордкович Применение тригонометрии при решении геометрических задач // Квант, 1972, №7.
28. Г.В.Дорофеев, М.К.Потапов, Н.Х.Розов О письменных вступительных экзаменах по математике на естественных факультетах МГУ (1966 и 1967 гг.)
29. Учебные компьютерные курсы компании ФИЗИКОН (www.mathematics.ru)
30. А.Савин. Тригонометрия. // Квант, 1996, №4.
31. Виленкин Н.Я. Комбинаторика М.: Наука, 1969.
32. Сергеев И.Н. Математика. задачи с ответами и решениями М.: КДУ, 2005.
33. Г.А. Бендриков, Б.Б. Буховцев, В.В. Керженцев, Г.Я. Мякишев. Физика. Задачи для поступающих в вузы. М.:Физматлит, 2000.
34. Алгебра и начала анализа. 3600 задач для школьников и поступающих в вузы. М.:Дрофа, 1999.
35. Проспект для поступающих в РГМУ. Москва, 2002.
36. Г.М.Фихтенгольц. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т.1. М.: Наука, 1969.
37. В.В. Зайцев, В.В.Рыжков, М.И.Сканави. Элементарная математика. М.: Наука, 1974.
38. Вступительные экзамены и олимпиады по математике 2003-2005. Задачи с ответами и решениями. Варианты письменных и устных экзаменов, задания олимпиад: по материалам вступительных испытаний в МГУ имени М.В.Ломоносова. Москва, 2006.
39. И.Шарыгин. Задачи по геометрии и планиметрии. Библ. журнала Квант, вып. 17. М.: Наука, 1986.
40. Математика: ЕГЭ-2008: реальные задания / авт.-сост. В.В. Кочагин, Е.М. Бойченко, Ю.А. Глазков и др. — М.: АСТ: Астрель, 2008.
41. ЕГЭ-2008: Математика: Тематические тренировочные задания / В.В. Кочагин, М.Н. Кочагина. — М.: Эксмо, 2008.
42. ЕГЭ-2009: Математика: Сдаем без проблем! / О.А. Креславская и др. — М.: Эксмо, 2008.
43. ЕГЭ-2008: Математика: Тренировочные задания / Т.Ф. Корешкова, Н.В. Шевелева, В.В. Мирошин. — М.: Эксмо, 2008.
44. ЕГЭ-2009: Математика: Тематические тренировочные задания / В.В. Кочагин, М.Н. Кочагина. — М.: Эксмо, 2009.
45. Математика. Задачи вступительных экзаменов и олимпиад на геологическом факультете МГУ за 1984-2008 годы. М.:МАКСПРЕСС, 2009.
46. Л.О. Денищева, Ю.А. Глазков, К.А. Краснянская, А.Р. Рязановский, П.В. Семенов Единый государственный экзамен 2009. Математика. Универсальные материалы для подготовки учащихся / ФИПИ — М.: Интеллект-Центр, 2009.
47. Н.И. Гольдфарб Сборник вопросов и задач по физике. Учеб. пособие. М.: Высш. школа, 1983.
48. Ю.А. Глазков, И.К. Варшавский, М.Я. Гаиашвили. Математика. ЕГЭ: сборник задач и методических рекомендаций. М.:Издательство «Экзамен», 2008.
49. И.М. Гельфанд, С.М. Львовский, А.Л. Тоом. Тригонометрия. М.: МЦНМО, 2003.

50. Задачи вступительных экзаменов / Составители А.А. Егоров, В.А. Тихомирова. — М.: Бюро Квантум, 2008. (Приложение к журналу «Квант» №6/2008.)
51. Самое полное издание типовых вариантов реальных заданий ЕГЭ: 2009 : Математика /авт. -сост. В.И. Ишина, В.В. Кочагин, Л.О. Денищева и др. — М.: АСТ: Астрель, 2009.
52. ЕГЭ-2009: Математика: Тренировочные задания / Т.Ф. Корешкова, В.В. Мирошин, Н.В. Шевелева. — М.: Эксмо, 2009.
53. И.Р. Высоцкий, Д.Д. Гущин, П.И. Захаров и др. — ЕГЭ-2010: Математика. М.: АСТ: Астрель, 2010.
54. И.В. Ященко, С.А. Шестаков, П.И. Захаров и др. —Подготовка к ЕГЭ по математике 2010г.: Математика. МЦНМО 2009.
55. ЕГЭ-2008: Математика. Сборник заданий / В.В. Кочагин, М.Н. Кочагина. — М.: Эксмо, 2008.
56. В.В. Прасолов Задачи по планиметрии. Часть 1. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1991.
57. Росс Хонсбергер Математические изюминки. Часть 1. М.: ТЕРРА-Книжный клуб, 2008.
58. С.А. Шестаков, П.И. Захаров. —Задача С1. МЦНМО 2010.
59. А.П. Власова, Н.В. Евсеева, Н.И. Латанова, Л.А. Шишкина, Г.В. Хромова Математика: 50 типовых вариантов экзаменационных работ для подготовки к ЕГЭ. М.: АСТ: Астрель, 2010.
60. В.В. Вавилов, И.И. Мельников, С.Н. Олехник, П.И. Пасиченко Задачи по математике. Уравнения и неравенства. М.: Наука, 1987.
61. И.Н. Сергеев, В.С. Панферов. ЕГЭ 2010 Задача С3. Уравнения и неравенства. М.: МЦНМО 2011.
62. R.D. Shapma Mathematics Class XI. Dhanpat RAI Publications (P) LTD 2010.
63. В.П. Моденов. Математика. Пособие для поступающих в вузы. М.: ООО «Издательство Новая волна», 2002.
64. Л.Д. Лаппо, М.А. Попов. Математика. Практикум 2011. Изд-во «Экзамен» М. 2011.
65. А.И. Козко, В.С. Панферов, И.Н. Сергеев, В.Г. Чирский ЕГЭ 2010. Математика. Задача С5. М.: МЦНМО, 2010.
66. Р.К. Гордин ЕГЭ 2010. Математика. Задача С4. М.: МЦНМО, 2010.
67. А.Г. Мордкович, Л.О. Денищева, Т.А. Корешкова, Т.Г. Мишустина, П.В. Семенов, Е.Е. Тульчинская Алгебра и начала математического анализа. 10-11 классы. В 2 ч. Ч.2 Задачник для учащихся общеобразовательных учреждений (базовый уровень) / под ред. А.Г. Мордковича. — 10-е изд., стер. — М.: Мнемозина, 2009.
68. ЕГЭ. Математика. Типовые экзаменационные варианты. 30 вариантов. Под редакцией А.Л. Семенова, И.В. Ященко. М.: 2010.
69. С.И. Колесникова ЕГЭ. Математика. Иррациональные неравенства. М.: 2010.
70. С.И. Колесникова ЕГЭ/ГИА. Математика. Уравнения и неравенства, содержащие модули. М.: 2010.
71. Корянов А.Г., Прокофьев А.А. Отбор корней в тригонометрических уравнениях (типовые задания С1).
72. Г.Н.Медведев. Участникам олимпиад и вступительных испытаний по математике 1971-2008. М.: URSS, 2011.

73. ЕГЭ-2012. Математика: типовые экзаменационные варианты: 30 вариантов. Под редакцией А.Л. Семенова, И.В. Ященко, М.: Национальное образование, 2011.
74. Корянов А.Г., Прокофьев А.А. Уравнения и неравенства с параметрами: количество решений (типовые задания С5).
75. <http://reshuege.ru/>.
76. Ляшко М.А., Ляшко С.А., Муравина О.В. Математика: учебное пособие. Сдаем ЕГЭ 2011. Дрофа 2011.
77. ЕГЭ-2013. Математика. Типовые экзаменационные варианты 30 вариантов. Под редакцией А.Л. Семенова, И.В. Ященко, М.: Национальное образование, 2012.
78. ЕГЭ-2013. Математика. 30 типовых вариантов заданий для подготовки к единому государственному экзамену. Под редакцией А.Л. Семенова, И.В. Ященко, М.: Астрель, 2013.
79. Корянов А.Г., Прокофьев А.А. Математика ЕГЭ-2011 (типовые задания С4).
80. ЕГЭ-2013. Математика. 30 вариантов типовых тестовых заданий и 800 заданий части 2(С). Под ред. А.Л. Семенова, И.В. Ященко. — М. Издательство «Экзамен», 2013.
81. С.И. Колесникова ЕГЭ. Математика. Показательные и логарифмические неравенства. М.: 2010.
82. Математика. Сборник тестов по плану ЕГЭ 2009: учебно-методическое пособие / Под ред. А.Г. Клово, Д.А. Мальцева. — Ростов н/д: Издатель Мальцев Д.А.; М. НИИ школьных технологий, 2009.
83. И.В. Ященко, С.А. Шестаков, П.И. Захаров Подготовка к ЕГЭ по математике 2011г.: Математика. Методические указания. МЦНМО 2011.
84. Оптимальный банк заданий для подготовки учащихся. Единый государственный экзамен 2014. Математика. Учебное пособие. / А.В. Семенов, А.С. Трепалин, И.В. Ященко, П.И. Захаров. — М.: Интеллект-Центр, 2014.
85. alexlarin.net.
86. А.Д. Кутасов, Т.С. Пиголкина, В.И. Чехлов, Т.Х. Яковлева Пособие по математике для поступающих в вузы. Под редакцией Г.Н. Яковлева. — М.: Наука, 1981.
87. ЕГЭ-2014. Математика. 30 вариантов типовых тестовых заданий и 800 заданий части 2(С). Под ред. А.Л. Семенова, И.В. Ященко. — М. Издательство «Экзамен», 2014.
88. Б.А. Кордемский Математическая смекалка Государственное издательство физико-математической литературы М.: 1958.
89. ЕГЭ-2016. Математика. 30 вариантов типовых тестовых заданий и 800 заданий части 2. Под ред. И.В. Ященко. — М. Издательство «Экзамен», 2016.
90. ЕГЭ-2016. Математика. 50 вариантов типовых тестовых заданий. Под ред. И.В. Ященко. — М. Издательство «Экзамен», 2016.
91. Л.С.Атанасян, В.Ф.Бутузов, С.Б.Кадомцев, Л.С.Киселева, Э.Г.Позняк Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия: Учебник для 10-11 классов общеобразовательных учреждений: базовый и углубленный уровни. М.: Просвещение, 2014.
92. ЕГЭ-2015. Математика: типовые экзаменационные варианты: 36 вариантов. — М. Издательство «Национальное образование», 2015.

93. Л.И. Звавич, Л.Я. Шляпчик, М.В. Чинкина Алгебра и начала анализа: 3600 задач для школьников и поступающих в вузы. — М.: Дрофа, 1999.
94. <http://math100.ru>
95. ЕГЭ-2016. Математика. Профильный уровень. 50 вариантов. Типовые тестовые задания от разработчиков ЕГЭ. Под ред. И.В. Ященко. — М. Издательство «Экзамен», 2016.
96. <https://ege-ok.ru>
97. И.В. Ященко, С.А. Шестаков. Математика. ЕГЭ-2020. Профильный уровень. — Издательство «МЦНМО», Москва, 2020.
98. В.К. Егеров и др. Сборник задач по математике для поступающих во втузы. Книга 2. Геометрия. — М.: «Высшая школа», 1995.
99. И.Г. Габович Алгоритмический подход к решению геометрических задач. — М. «Просвещение», 1996.
100. И.Ф. Шарыгин Математика. 2200 задач по геометрии для школьников и поступающих в вузы. — М.: «Дрофа», 1999.
101. А.В.Погорелов Геометрия: Учеб. для 7-11 кл. общеобразоват. учреждений. М.: Просвещение, 1998.
102. И.В. Ященко, С.А. Шестаков Подготовка к ЕГЭ по математике в 2021 году. Профильный уровень. — М.: МЦНМО, 2021.
103. ЕГЭ 2020. Математика. Профильный уровень. 50 вариантов. Типовые варианты экзаменационных заданий от разработчиков ЕГЭ. Под ред. И.В. Ященко. — М.: Издательство «Экзамен», издательство МЦНМО, 2020.
104. Г.И. Вольфсон, М.Я. Пратусевич, С.Е. Рукшин, К.М. Столбов, И.В. Ященко ЕГЭ-2013. Математика. Задача С6. Арифметика и алгебра. М.: МЦНМО, 2013.
105. ЕГЭ 2022. Математика. Профильный уровень. 50 вариантов. Типовые варианты экзаменационных заданий от разработчиков ЕГЭ. Под ред. И.В. Ященко. — М.: Издательство «Экзамен», издательство МЦНМО, 2022.
106. ЕГЭ-2020. Математика: 30 тренировочных вариантов экзаменационных работ для подготовки к единому государственному экзамену. Профильный уровень. — М.: АСТ, 2020.
107. И.В. Ященко, С.А. Шестаков Подготовка к ЕГЭ по математике в 2021 году. Профильный уровень. М.: МЦНМО, 2021.
108. И.В. Ященко, И.Р. Высоцкий ЕГЭ. Математика. Профильный уровень: типовые экзаменационные варианты: 36 вариантов. М.: Издательство «Национальное образование», 2018.
109. ЕГЭ-2015. Математика. 50 вариантов типовых тестовых заданий / под ред. И. В. Ященко. — Москва: Издательство «Экзамен», 2015. — 246 с.
110. И.В. Ященко, С.А. Шестаков ЕГЭ 2020. Математика. Профильный уровень. 20 вариантов экзаменационных заданий от разработчиков ЕГЭ. Тематическая рабочая тетрадь. М.: Издательство «Экзамен», МЦНМО, 2020.
111. ЕГЭ-2022. Математика. Профильный уровень: типовые экзаменационные варианты: 36 вариантов / под ред. И. В. Ященко. — Москва: Издательство «Национальное образование», 2022. — 224 с.
112. ЕГЭ-2024. Математика. Профильный уровень. 50 вариантов. Типовые варианты экзаменационных заданий от разработчиков ЕГЭ / под ред. И. В. Ященко. — Москва: Издательство «Экзамен», 2024. — 239 с.
113. Смирнов В. А. ЕГЭ-2013. Математика. Задача С2. Геометрия. Стереометрия. М.:МЦНМО, 2013.

114. ЕГЭ-2023. Математика. Профильный уровень. 50 вариантов. Типовые варианты экзаменационных заданий от разработчиков ЕГЭ / под ред. И. В. Ященко. — Москва: Издательство «Экзамен», 2023.
115. ЕГЭ-2021. Математика. Профильный уровень: типовые экзаменационные варианты: 36 вариантов / под ред. И. В. Ященко. — Москва: Издательство «Национальное образование», 2021. — 254 с.
116. ЕГЭ-2023. Математика. Профильный уровень: типовые экзаменационные варианты: 36 вариантов / под ред. И. В. Ященко. — Москва: Издательство «Национальное образование», 2023. — 224 с.
117. ЕГЭ-2025. Математика. Профильный уровень. 50 вариантов. Типовые варианты экзаменационных заданий от разработчиков ЕГЭ / под ред. И. В. Ященко. — Москва: Издательство «Экзамен», 2025. — 247 с.
118. ОГЭ-2023. Математика. 50 вариантов. Типовые варианты экзаменационных заданий от разработчиков ОГЭ / под ред. И. В. Ященко. — Москва: Издательство «Экзамен», 2023. — 279 с.
119. ОГЭ-2023. Математика. 36 вариантов. Типовые варианты экзаменационных заданий от разработчиков ОГЭ / под ред. И. В. Ященко. — Москва: Издательство «Национальное образование», 2023. — 220 с.
120. ЕГЭ-2024. Математика. Профильный уровень: типовые экзаменационные варианты: 36 вариантов / под ред. И. В. Ященко. — Москва: Издательство «Национальное образование», 2024. — 215 с.